CORRECTION DM 1

Exercice 1 :

1-a) La contraposée de P est : $\boxed{\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ (a>0 \text{ et } b<1) \Rightarrow (ab>a)}$

b) Posons $a=2$ et $b=0$, on a : $a>0$ et $b<1$.
De plus $ab=0$ et $a=2$ donc $ab>a$ est fausse.
Ainsi **la contraposée de P est fausse.**

c) Comme une propriété et sa contraposée ont la même vérité : **P est fausse.**

2- La négation de P est : $\boxed{\exists a \in \mathbb{R},\ \exists b \in \mathbb{R},\ ab \leq a \text{ et } a>0 \text{ et } b<1}$

3- Posons $a=-2$ et $b=\frac{1}{2}$. On a : $a \leq 0$ donc $(a \leq 0 \text{ ou } b \geq 1)$ est vraie.
De plus $ab=-1$ donc $ab \leq a$ est fausse.
Ainsi **la propriété est fausse.**

Problème 1 :

1-a) g est dérivable et, sur $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1)$. Ainsi $g'(x)$ est du signe de x^2-1.

x	$-\infty$		-1		1		α	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0		0	$+$		
g	$-\infty$	↗	-2	↘	-6	↗	0	$+\infty$

b) • g est strictement croissante sur $]-\infty,-1]$ et $g(-1)=-2<0$ donc : $\forall x \in]-\infty,-1],\ g(x)<0$.
• g est strictement décroissante sur $[-1,1]$ et $g(-1)=-2<0$ donc : $\forall x \in [-1,1],\ g(x)<0$.
• g est strictement croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$ et $0 \in [g(1), \lim_{+\infty} g[$
• g est continue et strictement croissante
donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $\exists!\ \alpha \in [1,+\infty[,\ g(\alpha)=0$.

Ainsi : $\boxed{\exists!\ \alpha \in \mathbb{R},\ g(\alpha)=0.}$

c) • D'après b) : $\forall x \in]-\infty,1],\ g(x)<0$.
• g est strictement croissante sur $[1,+\infty[$ et $g(\alpha)=0$ donc : $\forall x \in [1,\alpha[,\ g(x)<0$
et $\forall x \in]\alpha,+\infty[,\ g(x)>0$

Donc :

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall x \in]-\infty, \alpha[, \quad g(x) < 0 \\ g(\alpha) = 0 \\ \forall x \in]\alpha, +\infty[, \quad g(x) > 0 \end{array}}$$

d) $g(2) = -2$, $g(\alpha) = 0$ et $g(3) = 14$ donc $g(2) \leq g(\alpha) \leq g(3)$.
Or g est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ donc : $\boxed{2 \leq \alpha \leq 3}$.

2-a) • $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $x^2 - 1 \neq 0$, donc, par quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, $\boxed{f \text{ est dérivable}}$.

• Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$,
$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 4x)(x^2 - 1) - (x^3 + 2x^2)(2x)}{(x^2-1)^2}$$
$$= \frac{3x^4 - 3x^2 + 4x^3 - 4x - 2x^4 - 4x^3}{(x^2-1)^2}$$
$$= \frac{x^4 - 3x^2 - 4x}{(x^2-1)^2}$$

Donc : $\boxed{f'(x) = \dfrac{x g(x)}{(x^2-1)^2}}$

b) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, comme $(x^2-1)^2 > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x\,g(x)$.

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
x		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$	‖	$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘		↗	$+\infty$

c) • Soit $x \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1, 1\}$, $\quad f(x) = \dfrac{x^3(1 + \frac{2}{x})}{x^2(1 - \frac{1}{x^2})} = x \dfrac{1 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}}$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$

• $\lim\limits_{x \to 1} (x^3 + 2x^2) = 3 > 0$, $\lim\limits_{x \to 1} x^2 - 1 = 0$ et $\forall x \in]0, 1[, \ x^2 - 1 < 0$
$\forall x \in]1, 2[, \ x^2 - 1 > 0$

donc : $\boxed{\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty}$

• De même : $\boxed{\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty}$

d) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$,

$$f(x) - x - 2 = \frac{x^3 + 2x^2 - (x+2)(x^2-1)}{x^2-1} = \frac{x^3+2x^2-(x^3+2x^2-x-2)}{x^2-1} = \frac{x+2}{x^2-1}$$

Donc $\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - x - 2) = 0}$

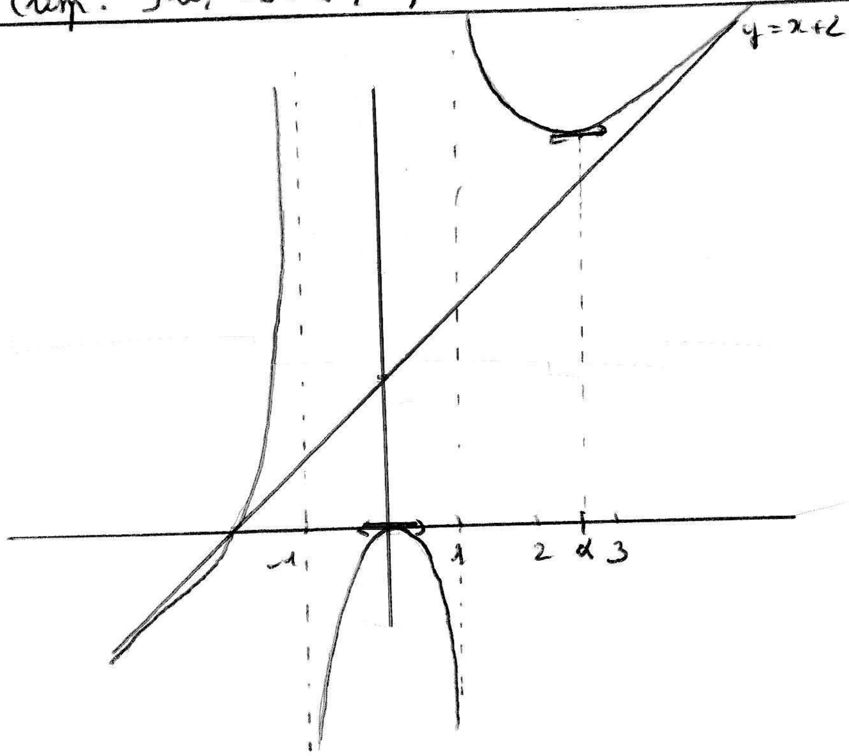
Ainsi **la courbe représentative de f admet pour asymptote en $\pm\infty$ la droite d'équation $y = x+2$.**

e)

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	||	$+$	||	$+$	
x^2-1		$+$		$+$	||	$-$	||	$+$	
$f(x)-x-2$		$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$	

La courbe est au dessus (resp. en dessous) de son asymptote sur $[-2,-1[\cup]1,+\infty[$ (resp. $]-\infty,-2] \cup]-1,1[$).

f)



Problème 2.

1- Soit $n \in \mathbb{N}$, $f(n+1) = n+1$ et $f \circ f(n) = f(n) = n$ donc $f(n+1) > f \circ f(n)$.

Donc $\boxed{f = Id_{\mathbb{N}} \text{ vérifie } (1).}$

2-a) • Pour $n = 0$, soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq n$. On a $f(k) \in \mathbb{N}$ donc $f(k) \geq n$.

Ainsi : $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq n \Rightarrow f(k) \geq n$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq n \Rightarrow f(k) \geq n$.

Montrons que : $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq n+1 \Rightarrow f(k) \geq n+1$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant n+1$.

- On a $k-1 \geqslant n$ donc $k-1 \in \mathbb{N}$. Ainsi, d'après 1, $f(k) > f \circ f(k-1)$.
- $k-1 \geqslant n$ donc par hypothèse de récurrence : $f(k-1) \geqslant n$.
- $f(k-1) \geqslant n$ donc, par hypothèse de récurrence : $f(f(k-1)) \geqslant n$.

Ainsi $f(k) > f \circ f(k-1)$ et $f \circ f(k-1) \geqslant n$ donc $f(k) > n$.

De plus, comme $f(k), n \in \mathbb{N}$, on a : $f(k) \geqslant n+1$.

D'où : $\forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant n+1 \Rightarrow f(k) \geqslant n+1$.

- Ainsi, par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, k \geqslant n \Rightarrow f(k) \geqslant n}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $n \geqslant n$ donc, d'après a), $f(n) \geqslant n$. Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \geqslant n.}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$, en appliquant la question précédente à $f(n)$, on a : $f(f(n)) \geqslant f(n)$

Donc $f \circ f(n) \geqslant f(n)$. Or, d'après (1), $f(n+1) > f \circ f(n)$. Donc $f(n+1) > f(n)$.

Ainsi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad f(n+1) > f(n)}$

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $f(n) \geqslant n$. Supposons $f(n) > n$, alors comme $n, f(n) \in \mathbb{N}$, $f(n) \geqslant n+1$.

D'après c, f est strictement croissante sur $\mathbb{N}$, donc $f \circ f(n) \geqslant f(n+1)$ ce qui contredit (1). Donc $f(n) = n$.

Ainsi $\boxed{f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}}$.

3 - La question 2. constitue l'analyse du problème et la 1. la synthèse.

On a donc montré que :

$\boxed{\text{il existe une unique application de } \mathbb{N} \text{ dans } \mathbb{N} \text{ vérifiant (1) qui est } \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}}$.