CORRECTION DM 2

Exercice 1 :

1) $2^{8n} - 3^{2n} + 13 = (2^{4n})^2 - (3^n)^2 + 13 = (2^{4n} - 3^n)(2^{4n} + 3^n) + 13$

De plus $2^{4n} = 16^n = (13+3)^n \geq 13^n + 3^n \geq 13 + 3^n$

Donc $2^{4n} - 3^n \geq 13 \geq 0$

Ainsi 13 est le reste de la division euclidienne de $2^{8n} - 3^{2n} + 13$ par $2^{4n} - 3^n$. Donc : $\boxed{pgcd(2^{8n} - 3^{2n} + 13, 2^{4n} - 3^n) = pgcd(2^{4n} - 3^n, 13)}$

2) . Pour $n = 2$, $2^{4n} - 3^n = 256 - 9 = 247 = 13 \times 19$

Donc $13 \mid 2^{4n} - 3^n$.

. Soit $n \geq 2$, supposons que $13 \mid 2^{4n} - 3^n$.

$2^{4(n+1)} - 3^{n+1} = 2^{4n} \times 16 - 3^n \times 3 = 2^{4n} \times (13+3) - 3^n \times 3$

$= 13 \times 2^{4n} + 3(2^{4n} - 3^n)$

Or $13 \mid 2^{4n} - 3^n$ donc $13 \mid 13 \times 2^{4n} + 3(2^{4n} - 3^n)$

Ainsi $13 \mid 2^{4(n+1)} - 3^{n+1}$

. Donc, par récurrence : $\boxed{\forall n \geq 2, \quad 13 \mid 2^{4n} - 3^n}$

3) Comme $13 \mid 2^{4n} - 3^n$, alors $pgcd(2^{4n} - 3^n, 13) = 13$.

Donc : $\boxed{pgcd(2^{8n} - 3^{2n} + 13, \ 2^{4n} - 3^n) = 13}$

Exercice 2 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$\cos((n+2)\theta) = \cos((n+1)\theta + \theta) = \cos((n+1)\theta)\cos(\theta) - \sin((n+1)\theta)\sin(\theta)$

$\cos(n\theta) = \cos((n+1)\theta - \theta) = \cos((n+1)\theta)\cos(\theta) + \sin((n+1)\theta)\sin(\theta)$

Ainsi, en sommant : $\cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) = 2\cos((n+1)\theta)\cos(\theta)$

Donc : $\boxed{\cos((n+2)\theta) = 2\cos((n+1)\theta)\cos(\theta) - \cos(n\theta)}$

2) Supposons que $\cos(\theta) \in \mathbb{Q}$.

- Pour $n=0$, $\cos(n\theta) = 1 \in \mathbb{Q}$.
- Pour $n=1$, $\cos(n\theta) = \cos\theta \in \mathbb{Q}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\cos(n\theta) \in \mathbb{Q}$ et $\cos((n+1)\theta) \in \mathbb{Q}$.

  Alors, comme $2 \in \mathbb{Q}$ et $\cos\theta \in \mathbb{Q}$, $2\cos((n+1)\theta)\cos(\theta) - \cos(n\theta) \in \mathbb{Q}$

  Ainsi $\cos((n+2)\theta) \in \mathbb{Q}$
- Donc, par récurrence double : $\forall n \in \mathbb{N}, \cos(n\theta) \in \mathbb{Q}$.

Ainsi : $\boxed{\cos\theta \in \mathbb{Q} \implies \forall n \in \mathbb{N}, \cos(n\theta) \in \mathbb{Q}}$

3) Supposons $\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) \in \mathbb{Q}$. Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \cos\left(n\frac{\pi}{16}\right) \in \mathbb{Q}$.

En particulier, pour $n=4$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \in \mathbb{Q}$. Donc $\frac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbb{Q}$.

Ainsi $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde.

Donc : $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) \notin \mathbb{Q}.}$

Exercice 3 :

1) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff sh^2(x) - ch(x) - 1 = 0 \\ &\iff ch^2(x) - 1 - ch(x) - 1 = 0 \\ &\iff ch^2(x) - ch(x) - 2 = 0 \end{aligned}$$

Posons $X = ch\,x$, alors :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff X^2 - X - 2 = 0 \\ &\iff (X+1)(X-2) = 0 \\ &\iff X = -1 \text{ ou } X = 2 \\ &\iff ch\,x = -1 \text{ ou } ch\,x = 2 \\ &\iff ch\,x = 2 \qquad \text{car } ch\,x \geq 1 \\ &\iff \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 2 \\ &\iff e^x + e^{-x} - 4 = 0 \\ &\iff e^{2x} - 4e^x + 1 = 0 \end{aligned}$$

Posons $Y = e^x$,

$f(x) = 0 \iff Y^2 - 4Y + 1 = 0$ (discriminant : $\Delta = 12$)

$\iff Y = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2}$

$\iff e^x = 2 + \sqrt{3}$ ou $e^x = 2 - \sqrt{3}$

$\iff x = \ln(2+\sqrt{3})$ ou $x = \ln(2-\sqrt{3})$

Donc les solutions sont : $\boxed{\ln(2+\sqrt{3}) \text{ et } \ln(2-\sqrt{3})}$.

2) • f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, soit $x \in \mathbb{R}$,

$f'(x) = 2\,ch(x)\,sh(x) - sh(x) = sh(x)(2ch(x) - 1)$

Or $ch(x) \geq 1$ donc $2ch(x) - 1 \geq 1$. Ainsi $f'(x)$ est du signe de $sh(x)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

• $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ch^2(x) - ch(x) - 2$ et $\lim_{x \to +\infty} ch(x) = +\infty$, $\lim_{X \to +\infty} (X^2 - X - 2) = +\infty$

donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

et comme f est paire $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Problème 1 :

1) • $x \mapsto \frac{2\sqrt{x}}{x+1}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$.

• Soit $x \in \mathbb{R}^+$, $-1 \leq \frac{1-x}{1+x} \leq 1 \iff -(1+x) \leq 1 - x \leq 1 + x$

$\iff -1 \leq 1$ et $-x \leq x$

$\iff x \geq 0$

donc comme Arccos est définie sur $[-1, 1]$, $x \mapsto \text{Arccos}\,\frac{1-x}{1+x}$ est bien définie sur $\mathbb{R}^+$

• Soit $x \in \mathbb{R}^+$, $-1 \leq \frac{2\sqrt{x}}{1+x} \leq 1 \iff -(1+x) \leq 2\sqrt{x} \leq 1 + x$

$\iff 0 \leq 1 + 2\sqrt{x} + x$ et $0 \leq 1 - 2\sqrt{x} + x$

$\iff 0 \leq (1+\sqrt{x})^2$ et $0 \leq (1-\sqrt{x})^2$

$\iff x \in \mathbb{R}^+$

donc comme Arcsin est définie sur $[-1, 1]$, $x \mapsto \text{Arcsin}\,\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ est bien définie sur $\mathbb{R}^+$

Donc f est définie sur $\boxed{D = \mathbb{R}^+}$

2-a) • $x \mapsto \dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

• Arccos et Arcsin sont dérivables sur $]-1,1[$ et, soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$-1 < \dfrac{1-x}{1+x} < 1 \iff -(1+x) < 1-x < 1+x \iff -1<1 \iff -x<x \iff x>0$.

$-1 < \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x} < 1 \iff 0<(1+\sqrt{x})^2$ et $0<(1-\sqrt{x})^2 \iff \sqrt{x} \neq 1 \iff x \neq 1$

Donc $\boxed{f \text{ est dérivable sur } D' = \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}}$

• Soit $x \in D'$,

$$f'(x) = -\frac{\dfrac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2}} + \frac{\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}(1+x)-2\sqrt{x}}{(1+x)^2}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)^2}}$$

$$= -\frac{-2}{(1+x)^2\sqrt{\dfrac{(1+x)^2-(1-x)^2}{(1+x)^2}}} + \frac{1+x-2x}{\sqrt{x}(1+x)^2\sqrt{\dfrac{(1+x)^2-(2\sqrt{x})^2}{(1+x)^2}}}$$

$$= \frac{2}{(1+x)\sqrt{4x}} + \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)\sqrt{(1-x)^2}}$$

$$= \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} + \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)|1-x|}$$

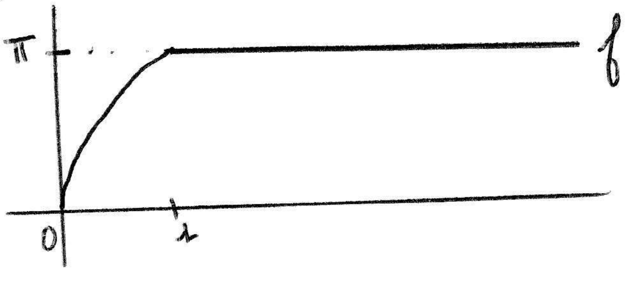
$$= \frac{1+\dfrac{1-x}{|1-x|}}{\sqrt{x}(1+x)} \quad \text{or} \quad |1-x| = \begin{cases} 1-x & \text{si } x<1 \\ x-1 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Donc
$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x>1 \\ \dfrac{2}{\sqrt{x}(1+x)} & \text{si } x<1 \end{cases}}$$

b) f est donc constante sur $[1,+\infty[$ et strictement croissante sur $[0,1]$.

De plus $f(0) = \text{Arccos } 1 + \text{Arcsin } 0 = 0$ et $f(1) = \text{Arccos } 0 + \text{Arcsin } 1 = \pi$

D'où :



c) On a : $\forall x \in [0,1[,\ f(x) < \pi$ et $\forall x \in [1,+\infty[,\ f(x) = \pi$.

Donc, l'ensemble des solutions de $f(x) = \pi$ est :

$$\boxed{[1,+\infty[.}$$

3-a) . φ est continue sur l'intervalle $[0,\pi[$

. φ est dérivable et, soit $u \in [0,\pi[$, $\varphi'(u) = 2 \times \frac{1}{2}\left(1+\tan^2 \frac{u}{2}\right) \cdot \tan \frac{u}{2}$

Donc : $\forall u \in]0,\pi[, \varphi'(u) > 0$ et $\varphi'(0) = 0$

Donc φ est strictement croissante sur $[0,\pi[$.

Donc φ est bijective de $[0,\pi[$ vers $[\varphi(0), \lim\limits_{\pi} \varphi[= [0,+\infty[$.

Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est bijective}}$

b) Soit $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned}
f(x) = \pi &\iff f(\varphi(u)) = \pi \\
&\iff \operatorname{Arccos}\left(\frac{1-\tan^2\frac{u}{2}}{1+\tan^2\frac{u}{2}}\right) + \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2\tan\frac{u}{2}}{1+\tan^2\frac{u}{2}}\right) = \pi \\
&\iff \operatorname{Arccos}\left(\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)\left(1-\tan^2\frac{u}{2}\right)\right) + \operatorname{Arcsin}\left(2\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)\tan\left(\frac{u}{2}\right)\right) = \pi \\
&\iff \operatorname{Arccos}\left(\cos^2\left(\frac{u}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{u}{2}\right)\right) + \operatorname{Arcsin}\left(2\cos\left(\frac{u}{2}\right)\sin\left(\frac{u}{2}\right)\right) = \pi \\
&\iff \operatorname{Arccos}(\cos(u)) + \operatorname{Arcsin}(\sin u) = \pi \\
&\iff u + \operatorname{Arcsin}(\sin u) = \pi
\end{aligned}$$

Or, si $u \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $\operatorname{Arcsin}(\sin u) = u$

et si $u \in]\frac{\pi}{2},\pi[$, $\operatorname{Arcsin}(\sin u) = \operatorname{Arcsin}(\sin(\pi - u)) = \pi - u$ car $\pi - u \in]0,\frac{\pi}{2}[$.

$$\begin{aligned}
\text{Donc } f(x) = \pi &\iff \begin{cases} 2u = \pi & \text{si } u \in [0,\frac{\pi}{2}] \\ \pi = \pi & \text{si } u \in]\frac{\pi}{2},\pi[\end{cases} \\
&\iff u \in [\tfrac{\pi}{2},\pi[\\
&\iff \frac{\pi}{2} \leq \varphi^{-1}(x) < \pi \\
&\iff \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq x < \lim_{\pi} \varphi \quad \text{car } \varphi \text{ strictement croissante} \\
&\iff 1 \leq x
\end{aligned}$$

Donc, l'ensemble des solutions de $f(x) = \pi$ est : $\boxed{[1,+\infty[.}$