CORRECTION DM 3

Problème 1 :

1- $H_1 = 1$, $H_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $H_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$

Donc $\boxed{H_1 \in \mathbb{N},\ H_2 \notin \mathbb{N},\ H_3 \notin \mathbb{N}}$

2- $H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1} = \frac{2p+1}{2q} + \frac{1}{n+1} = \frac{(2p+1)(n+1) + 2q}{2q(n+1)}$

Or n est pair donc il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2k$.

Ainsi $H_{n+1} = \frac{2pn + 2p + 2k + 1 + 2q}{2q(n+1)} = \frac{2(pn+p+k+q)+1}{2q(n+1)}$

Posons $p' = pn+p+k+q$, $q' = q(n+1)$. On a $p', q' \in \mathbb{N}$ et :

$$\boxed{H_{n+1} = \frac{2p'+1}{2q'}}.$$

3-a) $H_{n+1} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}$ par découpage

$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}$

Donc $\boxed{H_{n+1} = \frac{1}{2} H_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}}$

b) • $\prod_{j=0}^{n} (2j+1)$ est un produit de nombres impairs donc est impair. Ainsi il existe $b \in \mathbb{N}$ tel que : $\prod_{j=0}^{n} (2j+1) = 2b+1$.

• $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\prod_{j \in [\![0,n]\!] \setminus \{k\}} (2j+1)}{\prod_{j=0}^{n} (2j+1)} = \frac{\sum_{k=0}^{n} \prod_{j \in [\![0,n]\!] \setminus \{k\}} (2j+1)}{\prod_{j=0}^{n} (2j+1)}$

Posons $a = \sum_{k=0}^{n} \prod_{j \in [\![0,n]\!] \setminus \{k\}} (2j+1)$. Alors $a \in \mathbb{N}$ et :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} = \frac{a}{2b+1}}.$$

4- • Pour $n = 2$, $H_2 = \frac{3}{2}$. Posons $p = 1$ et $q = 1$.

On a $p, q \in \mathbb{N}$ et $H_2 = \frac{2p+1}{2q}$

②

- Soit $n \geq 2$. Supposons que : $\forall k \in [\![2, n]\!], \exists p, q \in \mathbb{N}, H_k = \frac{2p+1}{2q}$.

  - Si n est pair. Par hypothèse de récurrence, il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tel que $H_n = \frac{2p+1}{2q}$. Donc, d'après 2, il existe $p', q' \in \mathbb{N}$ tels que $H_{n+1} = \frac{2p'+1}{2q'}$.

  - Si n est impair. Alors $n = 2m+1$ avec $m \in \mathbb{N}^*$.

    On a donc $m+1 \geq 2$ et $m+1 = \frac{n+1}{2} \leq n$

    Donc, par hypothèse de récurrence, il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $H_{m+1} = \frac{2p+1}{2q}$

    De plus, d'après 3.b, il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2k+1} = \frac{a}{2b+1}$.

    et d'après 3.a, $H_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{2p+1}{2q} + \frac{a}{2b+1} = \frac{(2b+1)(2p+1)+2a}{4q(2b+1)}$

    $$= \frac{2(2bp+b+p+a)+1}{4q(2b+1)} = \frac{2p'+1}{2q'}$$

    où $p' = 2bp+b+p+a \in \mathbb{N}$, $q' = 2q(2b+1) \in \mathbb{N}$

  Dans tous les cas : $H_{n+1} = \frac{2p'+1}{2q'}$.

- Donc, par récurrence forte : $\boxed{\forall n \geq 2, \exists p, q \in \mathbb{N}, H_n = \frac{2p+1}{2q}}$.

5 - Soit $n \geq 2$. Supposons $H_n \in \mathbb{N}$.
Il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $H_n = \frac{2p+1}{2q}$. Donc $2p+1 = 2qH_n$.
Or $2p+1$ est impair et $2qH_n$ est pair ce qui est absurde.
Donc : $\boxed{\forall n \geq 2, H_n \notin \mathbb{N}}$

Problème 2 :

1) Soit $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = 0 \iff z^n = e^{2ina} \iff \left(\frac{z}{e^{2ia}}\right)^n = 1$

$$\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!], \frac{z}{e^{2ia}} = e^{2i\frac{k\pi}{n}}$$

$$\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!], z = e^{2i\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)}$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\boxed{\left\{ e^{2i\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)}, k \in [\![0, n-1]\!] \right\}}$$

2- a) $Z = e^{ina}\left(e^{-ina} - e^{ina}\right) = e^{ina} \times \left(-2i \sin(na)\right)$

Donc $\boxed{Z = -2i \sin(na) e^{ina}}$

b) $Z = P(1) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - z_k)$ donc $\boxed{Z = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - e^{2i(a + \frac{k\pi}{n})}\right)}$

c) $Z = \prod_{k=0}^{n-1} \left(e^{i(a+\frac{k\pi}{n})}\left(e^{-i(a+\frac{k\pi}{n})} - e^{i(a+\frac{k\pi}{n})}\right)\right)$

$= \prod_{k=0}^{n-1} e^{i(a+\frac{k\pi}{n})} \left(-2i \sin(a + \frac{k\pi}{n})\right)$

$= (-2i)^n . \prod_{k=0}^{n-1} e^{i(a+\frac{k\pi}{n})} . \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$

$= (-2i)^n . e^{i\sum_{k=0}^{n-1}(a+\frac{k\pi}{n})} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$

$= (-2i)^n e^{i\left(na + \frac{\pi}{n}\frac{n(n-1)}{2}\right)} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$

$= (-2i)^n e^{ina} e^{i\frac{\pi(n-1)}{2}} . \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$

$= (-2i)^n e^{ina} i^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$

$= -2^n . i \, e^{ina} (-i \times i)^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$

$= -2^n i \, e^{ina} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$.

Or $Z = -2i \sin(na) e^{ina}$

Donc $2^n \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right) = 2 \sin(na)$

D'où : $\boxed{\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin(na)}{2^{n-1}}}$.

b) On a : $a \equiv 0 \, [\pi]$ donc $na \equiv 0 \, [\pi]$ ainsi $\sin(na) = 0$

Donc : $\boxed{\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right) = 0}$

4-a) $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right) = \sin(a) . \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin(na)}{2^{n-1}}$

Or $\sin a \neq 0$, donc : $\boxed{\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin(na)}{2^{n-1} \sin(a)}}$

b) $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}+a\right) = \frac{\sin(na)}{na} \cdot \frac{a}{\sin a} \cdot \frac{n}{2^{n-1}}$

Or $\lim_{a\to 0} \frac{\sin(na)}{na} = 1$, $\lim_{a\to 0} \frac{a}{\sin a} = 1$ et $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\lim_{a\to 0} \sin\left(\frac{k\pi}{n}+a\right) = \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

Donc $\boxed{\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}}$.

5-a) $\prod_{k=n+1}^{2n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \underset{j=2n+1-k}{=} \prod_{j=1}^{n} \sin\left(\frac{(2n+1-j)\pi}{2n+1}\right)$

$= \prod_{j=1}^{n} \sin\left(\pi - \frac{j\pi}{2n+1}\right) = \prod_{j=1}^{n} \sin\left(\frac{j\pi}{2n+1}\right)$

Donc $\boxed{\prod_{k=n+1}^{2n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$

b) D'après 4-b appliqué à $2n+1$, $\prod_{k=1}^{2n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{2n+1}{2^{2n}}$

Or : $\prod_{k=1}^{2n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \cdot \prod_{k=n+1}^{2n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$

$= \left(\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2$

Donc $\left(\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2 = \frac{2n+1}{2^{2n}}$.

Ainsi : $\boxed{\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}}$.