CORRECTION DM4

Problème 1 :

1-a) • $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\text{Arctan}\, x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$ donc $\boxed{I_0 = \frac{\pi}{4}}$

• $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$ donc $\boxed{I_1 = \frac{1}{2}\ln 2}$.

b) $I_n + I_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+2}}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n(1+x^2)}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

Donc : $\boxed{I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}}$.

c) • $I_0 + I_2 = 1$ donc $I_2 = 1 - I_0$ d'où $\boxed{I_2 = 1 - \frac{\pi}{4}}$.

• $I_1 + I_3 = \frac{1}{2}$ donc $I_3 = \frac{1}{2} - I_1$ d'où $\boxed{I_3 = \frac{1-\ln 2}{2}}$

2-a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x^2}\,dx \leq 0$.

car : $\forall x \in [0,1]$, $\frac{x^n(x-1)}{1+x^2} \leq 0$.

Donc $\boxed{(I_n) \text{ est décroissante}}$.

b) • (I_n) est décroissante et minorée par 0 donc (I_n) converge vers $l \in \mathbb{R}^+$.

• On a : $\lim I_n = l$ et $\lim I_{n+2} = l$ donc $\lim (I_n + I_{n+2}) = 2l$.

Ainsi $\lim \frac{1}{n+1} = 2l$ donc $0 = 2l$.

Ainsi $\boxed{\lim I_n = 0}$

3-a) • Pour $p=1$, $u_p + 2(-1)^p I_{2p+1} = 1 - 2\,\frac{1-\ln 2}{2} = 1 - (1-\ln 2) = \ln 2$.

• Soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons que $u_p + 2(-1)^p I_{2p+1} = \ln 2$.

Alors : $u_{p+1} + 2(-1)^{p+1} I_{2(p+1)+1} = u_p + \frac{(-1)^{p+2}}{p+1} + 2(-1)^{p+1}\left(\frac{1}{2p+2} - I_{2p+1}\right)$

$= u_p + \cancel{\frac{(-1)^p}{p+1}} - \cancel{\frac{(-1)^p}{p+1}} + 2(-1)^p I_{2p+1}$

$= \ln 2$.

• Donc, par récurrence : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ u_p + 2(-1)^p I_{2p+1} = \ln 2}$.

b) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ donc $\lim\limits_{p\to+\infty} I_{2p+1} = 0$ d'où $\lim\limits_{p\to+\infty} (-1)^p I_{2p+1} = 0$.

Or : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\quad u_p = \ln 2 - 2(-1)^p I_{2p+1}$

Donc : $\boxed{\lim\limits_{p\to+\infty} u_p = \ln 2}$

4-a) • Pour $p=1$, $v_p + (-1)^p I_{2p} = 1 - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$

• Soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons que $v_p + (-1)^p I_{2p} = \frac{\pi}{4}$. Alors :

$$v_{p+1} + (-1)^{p+1} I_{2p+2} = v_p + \frac{(-1)^{p+2}}{2(p+1)-1} + (-1)^{p+1}\left(\frac{1}{2p+1} - I_{2p}\right)$$

$$= v_p + \cancel{\frac{(-1)^p}{2p+1}} - \cancel{\frac{(-1)^p}{2p+1}} + (-1)^p I_{2p}$$

$$= \frac{\pi}{4}.$$

• Donc, par récurrence : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\quad v_p + (-1)^p I_{2p} = \frac{\pi}{4}.}$

b) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ donc, $\boxed{\lim\limits_{p\to+\infty} v_p = \frac{\pi}{4}}$

5- Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $pI_p = \int_0^1 \frac{p x^p}{1+x^2}\,dx$.

On effectue l'intégration par parties : $u(x) = \frac{x}{1+x^2}$ $\quad u'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

$v'(x) = p x^{p-1}$ $\quad v(x) = x^p$

On a : $pI_p = \left[\frac{x^{p+1}}{1+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(1-x^2)\,x^p}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{(1-x^2)\,x^p}{(1+x^2)^2}\,dx$

Or $0 \leq \int_0^1 \frac{(1-x^2)\,x^p}{(1+x^2)^2}\,dx \leq \int_0^1 \frac{(1+x^2)\,x^p}{(1+x^2)^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x^p}{1+x^2}\,dx = I_p$.

De plus $\lim I_p = 0$, donc par encadrement : $\lim \int_0^1 \frac{(1-x^2)x^p}{(1+x^2)^2}\,dx = 0$.

Donc : $\boxed{\lim pI_p = \frac{1}{2}}$

Problème 2 :

1 - Soit $x \in \mathbb{R}$.

- $F_0(x) = \int_0^x dt$ donc $\boxed{F_0(x) = x}$
- $F_1(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = [\text{Arctan}\, t]_0^x$ donc $\boxed{F_1(x) = \text{Arctan}(x)}$.

2 - a) On effectue le changement de variable $u = \text{Arctan}\, t$, on a $du = \frac{dt}{1+t^2}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$F_2(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{\text{Arctan}\, x} \frac{1}{1+\tan^2 u} du$$

$$= \int_0^{\text{Arctan}\, x} \cos^2 u \, du = \int_0^{\text{Arctan}\, x} \frac{\cos(2u)+1}{2} du = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2u)}{2} + u\right]_0^{\text{Arctan}\, x}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2\,\text{Arctan}\, x)}{2} + \text{Arctan}\, x\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(\text{Arctan}\, x)\sin(\text{Arctan}\, x) + \text{Arctan}\, x\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \text{Arctan}\, x\right)$$

Donc $\boxed{F_2(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2} + \text{Arctan}\, x\right)}$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, $F_1(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

On effectue l'intégration par parties : $u(t) = \frac{1}{1+t^2}$ $\quad u'(t) = -\frac{2t}{(1+t^2)^2}$

$v'(t) = 1$ $\quad v(t) = t$

On a : $F_1(x) = \left[\frac{t}{1+t^2}\right]_0^x + 2\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt = \frac{x}{1+x^2} + 2\int_0^x \frac{1+t^2-1}{(1+t^2)^2} dt$

$$= \frac{x}{1+x^2} + 2\int_0^x \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t^2)^2}\right) dt$$

Donc $\boxed{F_1(x) = \frac{x}{1+x^2} + 2(F_1(x) - F_2(x))}$

Ainsi $2F_2(x) = \frac{x}{1+x^2} + F_1(x) = \frac{x}{1+x^2} + \text{Arctan}\, x$.

Donc : $\boxed{F_2(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2} + \text{Arctan}\, x\right)}$

3 - a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$.

On effectue l'intégration par parties :

$u(t) = \frac{1}{(1+t^2)^n}$ $\quad u'(t) = -\frac{2nt}{(1+t^2)^{n+1}}$

$v(t) = t$

$v'(t) = 1$

On a : $$F_n(x) = \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^x + 2n\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,dt$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int_0^x \frac{1+t^2-1}{(1+t^2)^{n+1}}\,dt$$

Donc : $$\boxed{F_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\left(F_n(x) - F_{n+1}(x)\right)}.$$

b) On a : $$2n F_{n+1}(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1)F_n(x).$$

Donc $$\boxed{F_{n+1}(x) = \frac{1}{2n}\left(\frac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1)F_n(x)\right)}$$

4- Soit $x \in \mathbb{R}$

- Pour $n=1$, $$\frac{(2n-2)!}{2^{2(n-1)}((n-1)!)^2}\left(F_1(x) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^{2k-1}(k!)^2}{(2k)!\,k}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^k}\right)$$

$$= 1\cdot(F_1(x) + 0) = F_1(x).$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $$F_n(x) = \frac{(2n-2)!}{2^{2(n-1)}((n-1)!)^2}\left(F_1(x) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^{2k-1}(k!)^2}{(2k)!\,k}\frac{x}{(1+x^2)^k}\right)$$

Alors : $$F_{n+1}(x) = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{(2n-1)(2n-2)!}{2n\cdot 2^{2(n-1)}((n-1)!)^2}\left(F_1(x) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^{2k-1}(k!)^2}{(2k)!\,k}\frac{x}{(1+x^2)^k}\right)$$

$$= \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)!}{2n\cdot 2n\cdot 2^{2(n-1)}((n-1)!)^2}\left(F_1(x) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^{2k-1}(k!)^2}{(2k)!\,k}\frac{x}{(1+x^2)^k}\right)$$

$$= \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(F_1(x) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^{2k-1}(k!)^2}{(2k)!\,k}\frac{x}{(1+x^2)^k}\right)$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(F_1(x) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^{2k-1}(k!)^2}{(2k)!\,k}\frac{x}{(1+x^2)^k} + \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\,2n}\frac{x}{(1+x^2)^n}\right)$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(F_1(x) + \sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2k-1}(k!)^2}{(2k)!\,k}\frac{x}{(1+x^2)^k}\right)$$

- Donc, par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad F_n(x) = \frac{(2n-2)!}{2^{2(n-1)}((n-1)!)^2}\left(F_1(x) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^{2k-1}(k!)^2}{(2k)!\,k}\frac{x}{(1+x^2)^k}\right)}$$

5-a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n}\,dt$.

On effectue le changement de variable $u = \text{Arctan}\, t$, on a : $du = \frac{1}{(1+t^2)}\,dt$,

donc : $$F_n(x) = \int_0^{\text{Arctan}\, x} \frac{1}{(1+\tan^2 u)^{n-1}}\,du$$

Ainsi $$F_n(x) = \int_0^{\text{Arctan}\, x} \cos^{2(n-1)}(u)\,du$$

Donc : $$\boxed{F_n(x) = \int_0^{\text{Arctan}\, x} \cos^{2(n-1)}(t)\,dt.}$$

b) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n}(t)\,dt = F_{n+1}(1) = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(F_1(1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2k-1}(k!)^2}{(2k)!\,k} \cdot \frac{1}{2^k}\right)$$

On $F_1(1) = \text{Arctan}\, 1 = \frac{\pi}{4}$, donc :

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n}(t)\,dt = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-1}(k!)^2}{(2k)!\,k}\right)}$$