CORRECTION

DM 6

Problème 1 :

1-a) $X_0 = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$ $X_1 = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$ et $u_3 = 2u_2 - \frac{5}{4}u_2 + \frac{1}{4}u_0 = 2$

Donc $\boxed{X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$

Donc $\boxed{A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ convient.}}$

c) On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$ donc, par propriété des suites géométriques :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0 = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

2-a)

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-4} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow -\frac{1}{4}L_3$$

Donc $\boxed{P \text{ est inversible et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, comme $A = PTP^{-1}$, on a : $\boxed{A^n = PT^nP^{-1}}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Donc $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, ainsi $\boxed{T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

3-a) Comme T est triangulaire supérieure, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{T^n = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 2^n & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

b) . Posons $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a : $T = \frac{1}{2}(B + D)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $BD = DB$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $B^2 = 0$, ainsi : $\forall k \geq 2,\ B^k = 0$.

Donc, d'après la formule du binôme de Newton :

$$T^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k D^{n-k}$$

Donc, si $n \geq 1$, $T^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} B^k D^{n-k} = \frac{1}{2^n}\left(D^n + n\, BD^{n-1}\right)$

et, comme D est diagonale : $T^n = \frac{1}{2^n}\left(\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

et cette formule est vraie pour $n = 0$, car $T^0 = I_3$.

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad T^n = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 2n+4 \\ 2^n & 2 & 4n+4 \\ 2^n & 4 & 8n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2^{n+2}-n-3 & -2^{n+2}+\frac{3}{2}n+4 & 2^n-\frac{n}{2}-1 \\ 2^{n+2}-2n-4 & -2^{n+2}+3n+5 & 2^n-n-1 \\ 2^{n+2}-4n-4 & -2^{n+2}+6n+4 & 2^n-2n \end{pmatrix} \end{array}$$

Donc : $\boxed{A^n = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 2^{n+2}-n-3 & -2^{n+2}+\frac{3}{2}n+4 & 2^n-\frac{n}{2}-1 \\ 2^{n+2}-2n-4 & -2^{n+2}+3n+5 & 2^n-n-1 \\ 2^{n+2}-4n-4 & -2^{n+2}+6n+4 & 2^n-2n \end{pmatrix}}$

4-a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} * \\ * \\ 2^{n+2}-4n-4 \end{pmatrix}$

Donc : $\boxed{u_n = \frac{1}{2^n}\left(2^{n+2}-4n-4\right)}$

b) On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 4 - 4\frac{n}{2^n} - \frac{4}{2^n}$

Or $\lim \frac{1}{2^n} = 0$ et $\lim \frac{n}{2^n} = 0$ par croissances comparées.

Donc : $\boxed{\lim u_n = 4.}$

Problème 2 :

1- Posons $f = c$, $c \in \mathbb{R}$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 f(y)^2 \iff c.c = c^2c^2$

$\iff c^2 = c^4$

$\iff c = 0$ ou $c^2 = 1$

$\iff c \in \{0, 1, -1\}$.

Donc les fonctions constantes vérifiant (E) sont :

$\boxed{0, 1 \text{ et } -1}$

2) • En appliquant (E) à $x = y = 0$, on a : $f(0)^2 = f(0)^4$

Donc $f(0) \in \{0, 1, -1\}$.

• Supposons $f(0) = 0$. En appliquant (E) à $y = 0$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)^2 = f(x)^2 \cdot f(0)^2 = 0$$

Donc $f = 0$ ce qui est absurde car f non constante. Ainsi $f(0) \neq 0$.

Donc $\boxed{f(0) \in \{1, -1\}}$

3) Supposons que f vérifie (E). Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(-f)(x+y)(-f)(x-y) = f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 f(y)^2 = (-f)(x)^2(-f)(y)^2$$

Donc $\boxed{-f \text{ vérifie (E).}}$

4-a) Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$.

Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f\left(\frac{x}{2^n}\right) = 0$.

• Pour $n = 0$, $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x) = 0$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = 0$. En appliquant (E) à $\frac{x}{2^{n+1}}$ et $\frac{x}{2^{n+1}}$, on a :

$$f\left(\frac{x}{2^{n+1}} + \frac{x}{2^{n+1}}\right) f\left(\frac{x}{2^{n+1}} - \frac{x}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)^2 f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)^2$$

Donc $\quad f\left(\frac{x}{2^n}\right) f(0) = f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)^4 \quad$ d'où $f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = 0$.

• Donc, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f\left(\frac{x}{2^n}\right) = 0$.

De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x}{2^n} = 0$ et f est continue en 0 donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0)$.

Ainsi $0 = f(0)$ ce qui est absurde.

Donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0}$

b) f est continue sur $\mathbb{R}$ et f ne s'annule pas. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f est de signe constant sur $\mathbb{R}$.

Or $f(0) = 1 > 0$. Donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0}$

5- En appliquant (E) à $x = 0$, on a, soit $y \in \mathbb{R}$,

$$f(y)f(-y) = f(0)^2 f(y)^2 = f(y)^2.$$

Or $f(y) \neq 0$ donc $f(-y) = f(y)$. Ainsi $\boxed{f \text{ est paire.}}$

6 - a) $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{+*})$, $\ln \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ donc, par composition,

$$\boxed{\varphi \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}}$$

b) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\ln\left(f(x+y)f(x-y)\right) = \ln\left(f(x)^2 f(y)^2\right)$

Donc $\ln\left(f(x+y)\right) + \ln\left(f(x-y)\right) = 2\left(\ln(f(x)) + \ln(f(y))\right)$

Ainsi : $\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x+y) + \varphi(x-y) = 2\left(\varphi(x) + \varphi(y)\right)}$ $(*)$

7 - a) . En appliquant $(*)$ à $n+1$ et 1, on a :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(n+2) + \varphi(n) = 2\left(\varphi(n+1) + \varphi(1)\right)$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n+2) = 2\varphi(n+1) - \varphi(n) + 2\lambda$.

. Pour $n=0$, $\varphi(0) = \ln(f(0)) = \ln 1 = 0 = \lambda n^2$

. Pour $n=1$, $\varphi(1) = \lambda = \lambda n^2$.

. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\varphi(n) = \lambda n^2$ et $\varphi(n+1) = \lambda(n+1)^2$.

Alors $\varphi(n+2) = 2\lambda(n+1)^2 - \lambda n^2 + 2\lambda$

$= \lambda n^2 + 4\lambda n + 4\lambda$

$= \lambda(n+2)^2$

. Donc, par récurrence double : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) = \lambda n^2$.

. f est paire donc φ est paire. Soit $n \in \mathbb{Z}^{-*}$

$\varphi(n) = \varphi(-n) = \lambda(-n)^2 = \lambda n^2$

. Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \varphi(n) = \lambda n^2.}$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

. Pour $n=0$, $\varphi(nx) = \varphi(0) = 0 = n^2\varphi(x)$

. Pour $n=1$, $\varphi(nx) = \varphi(x) = n^2\varphi(x)$

. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\varphi(nx) = n^2\varphi(x)$ et $\varphi((n+1)x) = (n+1)^2\varphi(x)$

En appliquant $(*)$ à $(n+1)x$ et x, on a :

$$\varphi((n+2)x) + \varphi(nx) = 2\left(\varphi((n+1)x) + \varphi(x)\right)$$

Donc $\varphi((n+2)x) = 2(n+1)^2\varphi(x) + 2\varphi(x) - n^2\varphi(x)$

$= (n^2 + 4n + 4)\varphi(x) = (n+2)^2\varphi(x)$

. Donc, par récurrence double :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad \varphi(nx) = n^2\varphi(x)}.$$

c) Soit $x \in \mathbb{Q}$, il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = \frac{p}{q}$.

On a : $\varphi(qx) = q^2\varphi(x)$ d'après b.

Donc $\varphi(x) = \dfrac{\varphi(p)}{q^2} = \dfrac{\lambda p^2}{q^2}$ d'après a.

Ainsi $\boxed{\varphi(x) = \lambda x^2.}$

d) Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe (x_n) suite de $\mathbb{Q}$ telle que : $x = \lim x_n$.

Comme φ est continue, $\varphi(x) = \lim \varphi(x_n) = \lim \lambda x_n^2 = \lambda x^2$.

Donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad \varphi(x) = \lambda x^2.}$

8- <u>Analyse</u> : Supposons qu'il existe f continue vérifiant (E).

. Si f est constante, $f \in \{0, 1, -1\}$

. Si f n'est pas constante

. Si $f(0) = 1$, alors : $f : x \mapsto e^{\lambda x^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

. Si $f(0) = -1$, alors $-f$ est solution donc $-f : x \mapsto e^{\lambda x^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Ainsi $f : x \mapsto -e^{\lambda x^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dans tous les cas $f : x \mapsto \pm e^{\lambda x^2}$ $\lambda \in \mathbb{R}$.

<u>Synthèse</u> : . Si $f \in \{0, 1, -1\}$ f est solution, d'après 1.

. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, posons $f : x \mapsto \pm e^{\lambda x^2}$. Alors f est continue.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$f(x+y)f(x-y) = e^{\lambda(x+y)^2} e^{\lambda(x-y)^2}$$
$$= e^{\lambda(2x^2+2y^2)}$$
$$= \left(e^{\lambda x^2}\right)^2\left(e^{\lambda y^2}\right)^2 = f(x)^2 f(y)^2$$

Donc f convient.

<u>Conclusion</u> : Les solutions sont :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{la fonction constante égale à } 0 \\ \text{et} \quad \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \pm e^{\lambda x^2}\end{array},\ \lambda \in \mathbb{R}\end{array}}$$