CORRECTION DM 7

Problème 1 :

1) Si $b^2 - 4ac > 0$, alors $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ admet deux racines distinctes r_1 et r_2 et le signe de f change entre r_1 et r_2. Donc f n'est pas de signe constant.

Ainsi, $\boxed{\text{si } f \text{ est de signe constant, alors } b^2 - 4ac \leq 0}$

2) a). $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$ donc $f' \in \mathcal{C}^1([a,b])$. Ainsi $\boxed{g \in \mathcal{C}^1([a,b])}$

. $g(a) = f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - \frac{\cancel{(b-a)^2}}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}}{\cancel{(b-a)^2}} \left(f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) \right)$

$= 0$

. $g(b) = f(b) - f(b) - 0 - 0 = 0$

Donc $\boxed{g(a) = g(b)}$.

b) g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et $g(a) = g(b)$, donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$,

c'est-à-dire : $\quad -f'(c) + f'(c) - (b-c)f''(c) + (b-c)A = 0$

soit $\quad f''(c) = A = \frac{2}{(b-a)^2}\left(f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) \right)$

soit : $\boxed{f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(c)}$

3 - Soient $x, \lambda \in \mathbb{R}$, d'après la formule de Taylor-Lagrange appliquée entre x et $x+\lambda$ il existe $c \in]x, x+\lambda[$ ou $]x+\lambda, x[$ tel que :

$$f(x+\lambda) = f(x) + (x+\lambda-x)f'(x) + \frac{(x+\lambda-x)^2}{2} f''(c)$$

Or $f(x+\lambda) \geq 0$ donc :

$$0 \leq f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2} f''(c).$$

De plus $f''(c) \leq |f''(c)| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |f''(t)|$.

Ainsi $\boxed{0 \leq f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2} \sup_{t \in \mathbb{R}} |f''(t)|}$

4-a) Si $\sup_{t\in\mathbb{R}} |f''(t)| = 0$, alors $f'' = 0$ donc f' est constante. Ainsi, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$.

Or $f \geq 0$ donc $a = 0$, ainsi $f = b$ et $f' = 0$.

D'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leq \sqrt{2 f(x) \sup_{t\in\mathbb{R}} |f''(t)|}}$.

b) Si $\sup_{t\in\mathbb{R}} |f''(t)| \neq 0$, alors, soit $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \mapsto f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2} \sup |f''|$ est une fonction polynômiale du second degré de signe constant.

Donc, d'après 1,

$$f'(x)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \sup |f''| \cdot f(x) \leq 0$$

D'où $\boxed{f'(x) \leq \sqrt{2 f(x) \sup |f''|}}$

5- • f est dérivable et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

• $\sqrt{\ }$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et est continue sur $\mathbb{R}^+$

Donc, par composition, $\boxed{g \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ et dérivable en tout point } x \text{ où } f(x) \neq 0.}$

6-a) En appliquant 4 à x_0, on a : $|f'(x_0)| \leq \sqrt{2 f(x_0) \sup |f''|} = 0$

Donc $\boxed{f'(x_0) = 0.}$

b) Supposons $f''(x_0) < 0$, comme f'' est continue, alors au voisinage de x_0, $f'' < 0$.

Donc f' est strictement décroissante au voisinage de x_0

Or $f'(x_0) = 0$ donc $f' > 0$ au voisinage de x_0^- et $f' < 0$ au voisinage de x_0^+.

Ainsi f est strictement décroissante au voisinage de x_0^+, or $f(x_0) = 0$

donc f est strictement négative au voisinage de x_0^+ ce qui est absurde.

Donc $\boxed{f''(x_0) \geq 0}$

c) • Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, d'après la formule de Taylor-Lagrange, il existe c compris entre x_0 et x tel que $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(c)$

c'est-à-dire : $\boxed{f(x) = \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(c).}$

- Supposons $f''(x_0) > 0$, soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, il existe c_x compris entre x_0 et x tel que

$$\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sqrt{f(x)}}{x-x_0} = \frac{\frac{1}{2}|x-x_0|\, f''(c_x)}{x-x_0} = \begin{cases} \frac{1}{2} f''(c_x) & \text{si } x > x_0 \\ -\frac{1}{2} f''(c_x) & \text{si } x < x_0. \end{cases}$$

Or, comme f'' est continue et $\lim\limits_{x\to x_0} c_x = x_0$, on a $\lim\limits_{x\to x_0} f''(c_x) = f''(x_0)$

Donc $\lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{2} f''(x_0)$ et $\lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = -\frac{1}{2} f''(x_0)$

Comme $f''(x_0) \neq 0$, $\frac{1}{2} f''(x_0) \neq -\frac{1}{2} f''(x_0)$.

Donc $\boxed{g \text{ n'est pas dérivable en } x_0.}$

7- a) Soit $x \in I_r$, f' est dérivable sur I_r et $|f''| \leq \sup\limits_{I_{2r}} |f''|$, donc d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée entre x_0 et x, on a :

$$|f'(x) - f'(x_0)| \leq |x-x_0| \sup_{I_{2r}} |f''|.$$

Or $f'(x_0) = 0$ et comme $x \in I_r$, $|x-x_0| \leq r$. Donc :

$$\boxed{|f'(x)| \leq r \sup_{I_{2r}} |f''|.}$$

b). Supposons $2 f(x) \sup\limits_{I_{2r}} |f''| < f'(x)^2$, alors le discriminant associé à T est :

$$\Delta = f'(x)^2 - 4 f(x) \cdot \frac{1}{2} \sup_{I_{2r}} |f''| > 0.$$

Donc $\boxed{T \text{ admet deux racines distinctes } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2}$

- On a : $|\lambda_1 + \lambda_2| = \left| \frac{-f'(x)}{\frac{1}{2}\sup\limits_{I_{2r}} |f''|} \right| = \left| -\frac{2f'(x)}{\sup\limits_{I_{2r}} |f''|} \right| = \frac{2|f'(x)|}{\sup\limits_{I_{2r}} |f''|} \leq 2r$ d'après 7. a.

Donc $|\mu| = \left|\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right| \leq r$. Ainsi $\boxed{\mu \in [-r, r]}$

- D'après la formule de Taylor-Lagrange appliquée à $x+\mu$ et x : il existe c compris entre $x+\mu$ et x tel que :

$$f(x+\mu) = f(x) + \mu f'(x) + \frac{\mu^2}{2} f''(c) \leq f(x) + \mu f'(x) + \frac{\mu^2}{2} \sup_{I_{2r}} |f''|$$

car $x \in I_r$ et $\mu \in [-r, r]$ donc $x + \mu \in I_{2r}$.

Donc $\boxed{f(x+\mu) \leq \tau(\mu)}$

- De plus $\mu = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$ donc μ est compris entre λ_1 et λ_2 et comme τ a un coefficient dominant positif, $\boxed{\tau(\mu) < 0}$

- On a supposé $f \geq 0$, donc $f(x+\mu) < 0$ est absurde.

Ainsi : $\forall x \in I_r, \quad 2f(x) \sup_{I_{2r}} |f''| \geq f'(x)^2$

Donc : $\boxed{\forall x \in I_r, \quad |f'(x)| \leq \sqrt{2f(x) \sup_{I_{2r}} |f''|}}$

8 - . Par composition, g est $\mathcal{C}^1$ en tous les points où f ne s'annule pas.

. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $f(x_0) = 0$. On a alors $f''(x_0) = 0$.

De plus, d'après 6. a), $f'(x_0) = 0$ et, de même qu'en 6. b, il existe c_x compris entre x_0 et x tel que : $\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} \frac{1}{2} f''(c_x) & \text{si } x > x_0 \\ -\frac{1}{2} f''(c_x) & \text{si } x < x_0 \end{cases}$

Donc $\lim_{x \to x_0^+} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{2} f''(x_0) = 0$ et $\lim_{x \to x_0^-} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = -\frac{1}{2} f''(x_0) = 0$

Donc g est dérivable en x_0 et $g'(x_0) = 0$.

. Soit $\varepsilon > 0$, on a $\lim_{x \to x_0} f''(x) = f''(x_0) = 0$ donc, il existe $r > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, \ |x - x_0| \leq 2r \Rightarrow |f''(x)| \leq 2\varepsilon^2$.

Donc : $\forall x \in I_{2r}, \ |f''(x)| \leq 2\varepsilon^2$ ainsi $\sup_{I_{2r}} |f''| \leq 2\varepsilon^2$.

D'où, d'après 7. b, soit $x \in I_r$, $|f'(x)| \leq \sqrt{2f(x) \sup_{I_{2r}} |f''|} \leq 2\varepsilon\sqrt{f(x)}$

Soit $x \in I_r$.

. Si $f(x) \neq 0$, $g'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ donc $|g'(x)| \leq \varepsilon$.

. Si $f(x) = 0$, alors $g'(x) = 0$

Dans tous les cas, $|g'(x)| \leq \varepsilon$. Donc $\lim_{x \to x_0} g'(x) = 0 = g'(x_0)$

Donc g' est continue en x_0. Ainsi g est $\mathcal{C}^1$ en x_0.

. Donc $\boxed{g \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$

Problème 2 :

1-a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n' = \sum_{k=1}^{n} \frac{k x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \underset{j=k-1}{=} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^j}{j!}$

Donc : $\boxed{S_n' = S_{n-1}}$

b) • Pour $n=0$, n est pair, $S_0 = 1$ donc S_0 n'a pas de racine réelle.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons le résultat au rang n.

- Si $n+1$ est pair, alors n est impair donc S_n a une unique racine réelle. Or $S_{n+1}' = S_n$ donc S_{n+1}' a une unique racine x_0.
Comme S_{n+1}' est continue, S_{n+1}' est de signe constant sur $]-\infty, x_0]$ et sur $[x_0, +\infty[$. Or, $\lim_{+\infty} S_{n+1}' = +\infty$ et $\lim_{-\infty} S_{n+1}' = -\infty$.
Donc $S_{n+1}' > 0$ sur $]x_0, +\infty[$ et $S_{n+1}' < 0$ sur $]-\infty, x_0[$.
Donc S_{n+1} admet un minimum en x_0.
Or : $S_{n+1}(x_0) = S_n(x_0) + \frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!} > 0$
car $n+1$ pair et $x_0 \neq 0$. Donc $S_{n+1} > 0$.
Ainsi S_{n+1} ne s'annule pas.

- Si $n+1$ est impair, alors n est pair donc S_n n'a pas de racine réelle.
Comme S_n est continue, S_n est de signe constant.
Comme $\lim_{+\infty} S_n = +\infty$, alors $S_n > 0$ donc $S_{n+1}' > 0$, ainsi S_{n+1} est strictement croissante. De plus $\lim_{+\infty} S_{n+1} = +\infty$ et $\lim_{-\infty} S_{n+1} = -\infty$
Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, S_{n+1} admet une unique racine.

• Donc, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$\boxed{\begin{array}{l} \text{si } n \text{ pair, } S_n \text{ n'a pas de racine réelle} \\ \text{si } n \text{ impair, } S_n \text{ a une unique racine réelle.} \end{array}}$

2-a) $P_n'(\alpha_n) = S_{2n}(\alpha_n)$ Or S_{2n} n'a pas de racine réelle.

Donc $S_{2n}(\alpha_n) \neq 0$, ainsi $P_n'(\alpha_n) \neq 0$.

Donc $\boxed{\alpha_n \text{ est racine simple de } P_n}$

b-i) En découpant selon les indices pairs et impairs, on a :

$$P_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{X^{2j}}{(2j)!} + \sum_{j=0}^{n} \frac{X^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{X^{2j}}{(2j)!} + \frac{X^{2j+1}}{(2j+1)!} \right)$$

Donc : $$\boxed{P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^{2k}}{(2k)!} \left(1 + \frac{X}{2k+1}\right)}$$

ii) . $P_n' = S_{2n} > 0$ d'après 1-b donc P_n est strictement croissante.

. $$P_n(-(2n+1)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n+1)^{2k}}{(2k)!} \left(1 - \frac{2n+1}{2k+1}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n+1)^{2k}}{(2k)!} \frac{2(k-n)}{2k+1} \leq 0$$

. $$P_n(-1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!} \left(1 - \frac{1}{2k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!} \frac{2k}{2k+1} \geq 0$$

. Donc $P_n(-(2n+1)) \leq P_n(\alpha_n) \leq P_n(-1)$.

Ainsi $\boxed{-(2n+1) \leq \alpha_n \leq -1.}$

c-i) $$P_{n+1}(\alpha_n) = S_{2n+3}(\alpha_n) = S_{2n+1}(\alpha_n) + \frac{\alpha_n^{2n+2}}{(2n+2)!} + \frac{\alpha_n^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

Or $S_{2n+1}(\alpha_n) = P_n(\alpha_n) = 0$, donc :

$$\boxed{P_{n+1}(\alpha_n) = \frac{\alpha_n^{2n+2}}{(2n+2)!} \left(1 + \frac{\alpha_n}{2n+3}\right)}$$

ii) On a : $\alpha_n \geq -(2n+1) \geq -(2n+3)$ donc $1 + \frac{\alpha_n}{2n+3} \geq 0$

Ainsi $P_{n+1}(\alpha_n) \geq 0 = P_{n+1}(\alpha_{n+1})$

Or P_{n+1} est strictement croissante donc $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$

Ainsi $\boxed{(\alpha_n) \text{ est décroissante.}}$

d) i) Soit $n \in \mathbb{N}$, comme $\alpha_n \leq -1$, $\ell \leq -1$.

. P_n est dérivable sur $[\ell, 0]$

. Soit $x \in [\ell, 0]$, $|P_n'(x)| = |S_{2n}(x)| = \left| \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!} \right|$

$$\leq \sum_{k=0}^{2n} \frac{|x|^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-\ell)^k}{k!}$$

Or, comme $-\ell \geq 0$, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-\ell)^k}{k!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, donc :

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-\ell)^k}{k!} \leq \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-\ell)^k}{k!} = e^{-\ell}$$

Ainsi $\forall x \in [\ell, 0]$, $|P_n'(x)| \leq e^{-\ell}$.

. Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$|P_n(\alpha_n) - P_n(\ell)| \leq e^{-\ell} |\alpha_n - \ell|$$

Or $\alpha_n \geq \ell$, donc $\boxed{|P_n(\alpha_n) - P_n(\ell)| \leq e^{-\ell}(\alpha_n - \ell)}$

ii) On a : $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$, donc $\lim_{n \to +\infty} (P_n(\alpha_n) - P_n(\ell)) = 0$

Or, $\lim_{n \to +\infty} P_n(\ell) = e^{\ell}$, donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} P_n(\alpha_n) = e^{\ell}}$.

iii) Comme : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(\alpha_n) = 0$, on a : $e^{\ell} = 0$ ce qui est absurde.

Donc (α_n) diverge.

e) (α_n) est décroissante et divergente.

Ainsi $\boxed{\lim \alpha_n = -\infty}$.