CORRECTION
DM 8

Problème 1 : Méthode de Newton

1- • Pour $n=0$, $x_0 \in [a,b]$ est bien défini et $f(x_0) > f(c)$.
Or f strictement croissante d'où $x_0 > c$. Ainsi $x_0 \in [c,b]$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons x_n bien défini et $x_n \in [c,b]$.

• Alors $x_n \in [a,b]$ donc $f(x_n)$ et $f'(x_n)$ sont bien définis et comme $f'(x_n) \neq 0$,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$ est bien défini.

• Comme $x_n \geq c$ et f croissante $f(x_n) \geq f(c) = 0$, de plus $f'(x_n) > 0$,

ainsi $x_{n+1} \leq x_n \leq b$

• Comme f est convexe : $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \geq f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$

En particulier : $f(c) \geq f'(x_n)(c - x_n) + f(x_n)$

Or $f(c) = 0$, donc $0 \geq f'(x_n)(c - x_n) + f(x_n)$

Donc, comme $f'(x_n) > 0$, $0 \geq c - x_n + \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Ainsi $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \geq c$

• Donc $x_{n+1} \in [c,b]$.

• Ainsi, par récurrence : $\boxed{(x_n) \text{ est bien définie et : } \forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in [c,b].}$

2- • Soit $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} - x_n = -\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \leq 0$ car $x_n \geq c$ et f croissante donc $f(x_n) \geq 0$

Donc (x_n) est décroissante.

• Comme (x_n) est minorée par c, (x_n) converge vers $\ell \in [c,b]$.

• On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ et f, f' continues sur $[a,b]$.

Donc, par passage à la limite : $\ell = \ell - \dfrac{f(\ell)}{f'(\ell)}$. Ainsi $f(\ell) = 0$.

Or c est l'unique zéro de f dans $[a,b]$, d'où $\ell = c$.

Donc : $\boxed{\lim x_n = c.}$

3-a). Comme f est $\mathcal{C}^2$, g est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et, soit $x \in [a,b]$,

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

- f'' est continue sur le segment $[a,b]$, donc f'' est bornée, ainsi, il existe $M_1 \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que : $\forall t \in [a,b]$, $|f''(t)| \leq M_1$.
- f' est continue sur le segment $[a,b]$, donc f' est bornée et atteint ses bornes, ainsi, il existe $d_1, d_2 \in [a,b]$ tels que :
$$\forall t \in [a,b], \quad f'(d_1) \leq f'(t) \leq f'(d_2).$$
Posons $M_2 = f'(d_1)$ et $M_3 = f'(d_2)$. On a : $M_2, M_3 \in \mathbb{R}^{+*}$ et :
$$\forall t \in [a,b] \quad 0 < M_2 \leq f'(t) \leq M_3.$$
- f est dérivable sur $[a,b]$ et : $\forall t \in [a,b]$, $|f'(t)| \leq M_3$.
Soit $x \in [c,b]$, d'après l'inégalité des accroissements finis :
$$\forall t \in [c,x], \quad |f(t) - f(c)| \leq M_3 |t-c|$$
Donc : $\forall t \in [c,x]$, $\quad |f(t)| \leq M_3 |x-c|$.
- Donc ; soit $x \in [c,b]$, soit $t \in [c,x]$ $\quad |g'(t)| \leq \dfrac{M_1 M_3 |x-c|}{M_2^2}$.
Posons $K = \dfrac{M_1 M_3}{M_2^2} > 0$, on a : $\boxed{|g'(t)| \leq K|x-c|}$

b) Soit $x \in [c,b]$
- g est dérivable sur $[a,b]$ et : $\forall t \in [c,x]$, $|g'(t)| \leq K|x-c|$
Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis :
$$|g(x) - g(c)| \leq K|x-c| \cdot |x-c|$$
Or : $g(c) = c - \dfrac{f(c)}{f'(c)} = c$, d'où :
$$\boxed{|g(x) - c| \leq K|x-c|^2.}$$
- Soit $n \in \mathbb{N}$, comme $x_n \in [c,b]$, on a : $|g(x_n) - c| \leq K|x_n - c|^2$
D'où : $\boxed{|x_{n+1} - c| \leq K|x_n - c|^2}$

4- • Pour $n=0$, $|x_0 - c| \leq b-a$ car $x_0, c \in [a,b]$

Or : $\frac{1}{K}(K(b-a))^{2^n} = b-a$ donc $|x_0 - c| \leq \frac{1}{K}(K(b-a))^{2^n}$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $|x_n - c| \leq \frac{1}{K}\left(K(b-a)\right)^{2^n}$.

Alors $|x_{n+1} - c| \leq K \cdot \left(\frac{1}{K}(K(b-a))^{2^n}\right)^2 = \frac{1}{K}\left(K(b-a)\right)^{2^{n+1}}$

• Donc, par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n - c| \leq \frac{1}{K}\left(K(b-a)\right)^{2^n}.}$

5- Si $K(b-a) < 1$, alors (x_n) converge vers c à la même vitesse de $(K(b-a))^{2^n}$, c'est-à-dire très rapidement.

<u>Problème 2 : Polynômes d'interpolation de Lagrange.</u>

1-a) $\deg(L_i) = \deg\left(\prod_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} (X - a_j)\right) = \sum_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} 1$

Donc : $\boxed{\deg(L_i) = n-1}$

b) Soient $i, k \in [\![1,n]\!]$,

$$L_i(a_k) = \frac{\prod_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} (a_k - a_j)}{\prod_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} (a_i - a_j)}$$

• si $i = k$, on a : $L_i(a_k) = 1$

• si $i \neq k$, $\exists j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}$, $a_k = a_j$, donc $L_i(a_k) = 0$.

Ainsi : $\boxed{L_i(a_k) = \delta_{i,k}.}$

c) • <u>Analyse</u> : Supposons qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que : $P = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i$.

Soit $k \in [\![1,n]\!]$, alors $P(a_k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i(a_k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{i,k} = \lambda_k$.

Donc : $\lambda_k = P(a_k)$.

• <u>Synthèse</u> : Posons $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (P(a_1), \dots, P(a_n))$

Posons $Q = P - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i$.

Comme $P, L_1, \dots, L_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a : $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

De plus, soit $k \in [\![1,n]\!]$, $Q(a_k) = P(a_k) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i(a_k) = P(a_k) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{i,k}$

$= P(a_k) - \lambda_k = 0$

Donc Q admet au moins n racines distinctes et $\deg Q \leq n-1$,

d'où $Q = 0$ et $P = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i$

• Conclusion : $\boxed{\text{Il existe un unique } (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que : } P = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i \quad \text{et on a : } \forall k \in [\![1,n]\!],\ \lambda_k = P(a_k).}$

d) Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, d'après la question précédente.

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ Q(a_k) = x_k \iff Q = \sum_{i=1}^{n} x_i L_i .$$

D'où $\boxed{\text{l'existence et l'unicité de } Q.}$

e-i) Soit $i \in [\![1,n]\!]$, a_i est racine simple de ϕ donc : $\boxed{\phi'(a_i) \neq 0 .}$

ii) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Posons $\phi_i = \prod_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} (X - a_j)$.

On a : $\phi = (X - a_i) . \phi_i$

Donc $\phi' = \phi_i + (X - a_i)\phi_i'$

Ainsi $\phi'(a_i) = \phi_i(a_i) = \prod_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} (a_i - a_j)$.

Donc $$L_i = \frac{\prod_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} (X - a_j)}{\phi'(a_i)} .$$

Or : $Q = \sum_{i=1}^{n} x_i L_i$, ainsi :

$$\boxed{Q = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\prod_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} (X - a_j)}{\phi'(a_i)}}$$

2- $|f|$ est continue sur le segment $[-1,1]$ donc, d'après le théorème des bornes atteintes : $\boxed{\max_{t \in [-1,1]} |f(t)| \text{ existe.}}$

3-a) i) $\varphi(t) = 0 \iff f(t) - P(t) - \lambda\phi(t) = 0$

Or $t \notin \{a_1,\dots,a_n\}$ donc $\phi(t) \neq 0$, ainsi $\boxed{\lambda = \frac{f(t) - P(t)}{\phi(t)} \text{ convient.}}$

ii) • Soit $i \in [\![1,n]\!]$, $\varphi(a_i) = f(a_i) - P(a_i) - \lambda\phi(a_i) = 0$ car $f(a_i) = P(a_i)$ et $\phi(a_i) = 0$

• $\varphi(t) = 0$

Donc φ s'annule en $a_1,\dots,a_n, t$ qui sont 2 à 2 distincts.

Donc $\boxed{\varphi \text{ s'annule au moins } n+1 \text{ fois sur } [-1,1]}$

- Soient $c_1 < \dots < c_{n+1}$ des points d'annulation de φ sur $[-1,1]$.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$. φ est continue sur $[c_k, c_{k+1}]$, dérivable sur $]c_k, c_{k+1}[$ et $\varphi(c_k) = \varphi(c_{k+1}) = 0$. Donc, d'après le théorème de Rolle il existe $c_k' \in]c_k, c_{k+1}[$ tel que $\varphi'(c_k') = 0$.

De plus $c_1' < \dots < c_n'$ donc $\boxed{\varphi' \text{ s'annule au moins } n \text{ fois sur } [-1,1].}$

iii) Par récurrence, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\varphi^{(k)}$ s'annule au moins $n+1-k$ fois sur $[-1,1]$, donc : $\boxed{\varphi^{(n)} \text{ s'annule au moins une fois sur } [-1,1]}$

iv) On a : $0 = \varphi^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) - P^{(n)}(a) - \lambda \phi^{(n)}(a)$.

Or : • $\deg P \leq n-1$, donc $P^{(n)} = 0$

• $\lambda = \dfrac{f(t) - P(t)}{\phi(t)}$

• $\phi = X^n + R$ avec $\deg R < n$, donc $\phi^{(n)} = (X^n)^{(n)} + R^{(n)}$

Or $R^{(n)} = 0$ donc $\phi^{(n)} = n!$

Ainsi $f^{(n)}(a) - \dfrac{f(t) - P(t)}{\phi(t)} \cdot n! = 0$

D'où : $\boxed{f(t) - P(t) = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} \phi(t).}$

b) • Soit $t \in \{a_1, \dots, a_n\}$, $|f(t) - P(t)| = 0 \leq \dfrac{M_n}{n!} |\phi(t)|$

• Soit $t \in [-1,1] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, $|f(t) - P(t)| = \dfrac{|f^{(n)}(a)|}{n!} |\phi(t)|$

$$\leq \frac{M_n}{n!} |\phi(t)|$$

Donc : $\boxed{\forall t \in [-1,1], \quad |f(t) - P(t)| \leq \dfrac{M_n}{n!} |\phi(t)|}$