CORRECTION DM 9

D'après Centrale - PC - 2022

1 - Polynômes de Lagrange

a) Soient $i, k \in [\![1, n]\!]$,

$$L_i(a_k) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{a_k - a_j}{a_i - a_j}$$

- Si $i = k$, $L_i(a_k) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} 1 = 1$
- si $i \neq k$, il existe $j \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\}$ tel que $a_k = a_j$ donc $L_i(a_k) = 0$.

Ainsi $\boxed{L_i(a_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$

b) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Posons $Q = P - \sum_{i=1}^{n} P(a_i) L_i$.

- $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\deg L_i = n-1$ donc $\deg Q \leq n-1$.
- Soit $k \in [\![1, n]\!]$, $Q(a_k) = P(a_k) - \sum_{i=1}^{n} P(a_i) L_i(a_k) = P(a_k) - P(a_k) = 0$.

Ainsi Q admet au moins n racines distinctes. Donc : $Q = 0$.

D'où : $\boxed{P = \sum_{i=1}^{n} P(a_i) L_i.}$

c) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. On a $P = \sum_{i=1}^{n} P(a_i) L_i$ et :

- le coefficient de X^{n-1} dans P est : 0
- " $\sum_{i=1}^{n} P(a_i) L_i$ est : $\sum_{i=1}^{n} P(a_i) \cdot \frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (a_i - a_j)}$

Donc : $\boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{P(a_i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (a_i - a_j)} = 0.}$

2- Polynômes de Tchebychev

a) On a : $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $0 = (1-1)^n = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} (-1)^k$

Donc, en sommant : $2^n = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \left(1+(-1)^\ell\right)$

$$= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} \left(1+(-1)^p\right) + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2p+1} \cancel{\left(1+(-1)^{2p+1}\right)}$$

$$= 2 \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}.$$

D'où : $\boxed{\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} = 2^{n-1}.}$

b) . Soit $p \in [\![0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]\!]$, $\deg\left(X^{n-2p}(1-X^2)^p\right) = n - 2p + 2p = n.$

donc $\deg T_n \leq n.$

. Le coefficient de X^n dans T_n est : $\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} \times (-1)^p = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} = 2^{n-1} \neq 0$

Donc $\boxed{\deg T_n = n \text{ et son coefficient dominant est } 2^{n-1}.}$

c) . Soit $\theta \in \mathbb{R}$,

$$T_n(\cos\theta) = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} \cos^{n-2p}\theta \, (1-\cos^2\theta)^p = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} \cos^{n-2p}\theta \sin^{2p}\theta$$

De plus, d'après la formule de Moivre :

$$\cos(n\theta) = \mathrm{Re}\left((e^{i\theta})^n\right) = \mathrm{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^n\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-\ell}(\theta) (i\sin\theta)^\ell\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} i^\ell \cos^{n-\ell}(\theta) \sin^\ell(\theta)\right)$$

$$= \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} (-1)^p \cos^{n-2p}(\theta) \sin^{2p}(\theta) \quad \text{car } i^\ell = \begin{cases} \underset{\in \mathbb{R}}{(-1)^p} & \text{si } k = 2p \\ \underset{\in i\mathbb{R}}{i(-1)^p} & \text{si } k = 2p+1 \end{cases}$$

Donc : $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$

- Supposons qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

Alors $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $(T_n - P_n)(\cos\theta) = 0$.

Comme $\{\cos\theta, \theta \in \mathbb{R}\} = [-1,1]$ est infini alors $T_n - P_n$ admet une infinité de racines. Donc $T_n - P_n = 0$ et $P_n = T_n$.

- Ainsi $\boxed{T_n \text{ est l'unique polynôme tel que : } \forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).}$

d) - Soit $k \in [\![1,n]\!]$, $T_n(x_k) = T_n\left(\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\right) = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}\right) = 0$

de plus $\frac{(2k-1)\pi}{2n} \in [0,\pi]$ donc les x_k, $k \in [\![1,n]\!]$ sont n racines distinctes de T_n.

- Comme $\deg T_n = n$, on a : $T_n = \lambda \prod_{k=1}^{n}(X - x_k)$ où λ est le coefficient dominant de T_n, donc d'après 2. b, $\lambda = 2^{n-1}$. Ainsi :

$$\boxed{T_n = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}(X - x_k)}$$

3-a). Comme $\{\cos\theta, \theta \in \mathbb{R}\} = [-1,1]$, on a :

$$\sup_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = \sup_{\theta\in\mathbb{R}} |T_n(\cos\theta)| = \sup_{\theta\in\mathbb{R}} |\cos(n\theta)|$$

Donc : $\boxed{\sup_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = 1.}$

- Posons $P_n = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$. Alors $\deg P_n = \deg T_n = n$, le coefficient dominant de P_n est : $\frac{1}{2^{n-1}} \cdot 2^{n-1} = 1$ donc P_n est unitaire et :

$$\sup_{x\in[-1,1]} |P_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}} \sup_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Donc $\boxed{P_n = \frac{1}{2^{n-1}} T_n \text{ est un polynôme unitaire de degré } n \text{ réalisant le cas d'égalité dans } (1).}$

b) . On a $\deg T_n = n$ et $\deg W = n$ donc $\deg Q \leq n$.

. Le coefficient de X^n dans Q est $\frac{1}{2^{n-1}} 2^{n-1} - 1 = 0$

donc : $\boxed{\deg Q \leq n-1.}$

c) i) Soit $k \in [\![0,n]\!]$,

$T_n(z_k) = T_n(\cos(\frac{k\pi}{n})) = \cos(k\pi) = (-1)^k$

Donc $Q(z_k) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n-1}} - W(z_k) & \text{si } k \text{ pair} \\ -\frac{1}{2^{n-1}} - W(z_k) & \text{si } k \text{ impair.} \end{cases}$

Or : $|W(z_k)| \leq \sup_{x\in[-1,1]} |W(x)|$ car $z_k \in [-1,1]$.

Donc $|W(z_k)| < \frac{1}{2^{n-1}}$, ainsi $-\frac{1}{2^{n-1}} < W(z_k) < \frac{1}{2^{n-1}}$.

Donc : $\boxed{Q(z_k) > 0 \text{ si } k \text{ est pair et } Q(z_k) < 0 \text{ si } k \text{ est impair}}$

ii) Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$. Q est continue sur l'intervalle $]z_{k+1}, z_k[$ et $Q(z_k)$ et $Q(z_{k+1})$ sont de signe opposé. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\boxed{\text{il existe } c_k \in]z_{k+1}, z_k[\text{ tel que : } Q(c_k) = 0.}$

iii) $c_0, \dots, c_{n-1}$ sont n racines distinctes de Q, or $\deg Q \leq n-1$

donc $Q = 0$. Ainsi $W = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$ donc $\sup_{x\in[-1,1]} |W(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}$

ce qui est absurde.

Donc : $\boxed{\sup_{x\in[-1,1]} |W(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}}$

d-i) Soit $k \in [\![0,n]\!]$.

. $Q(z_k) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n-1}} - W(z_k) & \text{si } k \text{ pair} \\ -\frac{1}{2^{n-1}} - W(z_k) & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$ et $|W(z_k)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

Donc $Q(z_k) \geq 0$ si k est pair et $Q(z_k) \leq 0$ si k est impair.

• Soit $j \in [\![0,n]\!] \setminus \{l\}$, $\begin{cases} z_l - z_j > 0 & \text{si } j < k \\ z_l - z_j < 0 & \text{si } j < k \end{cases}$ (car cos strictement décroissante sur $[0,\pi]$.

Donc $\prod_{\substack{j=0\\ j\neq l}}^{n} (z_l - z_j)$ est un produit avec k termes strictement négatifs et $n-k$ termes strictement positifs.

Donc $\prod_{\substack{j=0\\ j\neq l}}^{n} (z_l - z_j) > 0$ si k pair

< 0 si k impair.

. Donc : $\boxed{\dfrac{Q(z_l)}{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq l}}^{n} (z_l - z_j)} \geq 0 .}$

ii) On applique la question 1.c aux $n+1$ points $z_0, \dots, z_n$.

Comme $\deg Q \leq (n+1) - 2$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{Q(z_l)}{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq l}}^{n} (z_l - z_j)} = 0$$

Et comme tous les termes de cette somme sont nuls, on a : $\forall l \in [\![0,n]\!], Q(z_l) = 0$.

Donc Q admet au moins $n+1$ racines distinctes et $\deg Q \leq n-1$.

Donc : $\boxed{Q = 0 \quad \text{et} \quad W = \frac{1}{2^{n-1}} T_n .}$

4-a-i) On a : $T_n = 2^{n-1} \prod_{j=1}^{n} (X - x_j) = 2^{n-1} (X - x_l) . Q_l$.

Donc $T_n' = 2^{n-1} Q_l + 2^{n-1} (X - x_l) Q_l'$

D'où $\boxed{T_n'(x_l) = 2^{n-1} Q_l(x_l)}$

ii) Soit $k \in [\![1,n]\!]$, $L_k(X) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \dfrac{X - a_j}{a_k - a_j} = \dfrac{1}{2^{n-1}} \dfrac{T_n(X)}{X - a_l} \cdot \dfrac{1}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq l}} (a_l - a_j)}$

$= \dfrac{1}{2^{n-1}} \dfrac{T_n(X)}{X - a_l} \cdot \dfrac{1}{Q_l(x_l)}$

Donc $\boxed{L_l(X) = \dfrac{T_n(X)}{(X - a_l) T_n'(x_l)}}$

iii). On a : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

Donc, en dérivant : $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad -\sin\theta \cdot T_n'(\cos\theta) = -n\sin(n\theta)$

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, comme $\sin\theta \neq 0$, on a :

$$\boxed{T_n'(\cos\theta) = \frac{n\sin(n\theta)}{\sin\theta}}$$

. Soit $k \in [\![1, n]\!]$, $T_n'(x_k) = T_n'\left(\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\right) = \dfrac{n\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)}$

Or : $\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}\right) = \sin\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{k+1}$

$\sin^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) = 1 - x_k^2$

et $\frac{(2k-1)\pi}{2n} \in]0, \pi[$ donc $\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) > 0$

Ainsi $$\boxed{T_n'(x_k) = \frac{n(-1)^{k+1}}{\sqrt{1-x_k^2}}}.$$

b-i) D'après 1-b), $P(X) = \sum_{k=1}^{n} P(x_k) L_k = \sum_{k=1}^{n} P(x_k) \dfrac{T_n(X)}{T_n'(x_k)(X - x_k)}$.

Donc $P_1(x) = \sum_{k=1}^{n} P(x_k) \dfrac{T_n(x)\sqrt{1-x_k^2}}{n(-1)^{k+1}(x - x_k)}$.

D'où :
$$\boxed{P(x) = \sum_{k=1}^{n} P(x_k) \frac{T_n(x)(-1)^{k+1}\sqrt{1-x_k^2}}{n(x - x_k)}}$$

ii) $|P(x)| \leq \dfrac{|T_n(x)|}{n} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{|P(x_k)|\sqrt{1-x_k^2}}{|x - x_k|}$

Or $x_k \in [-1, 1]$, donc $\sqrt{1-x_k^2}\,|P(x_k)| \leq 1$.

D'où :
$$\boxed{|P(x)| \leq \frac{|T_n(x)|}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|x - x_k|}}$$

2-i) . $\deg T_n' = n-1 < \deg T_n$

. $T_n = 2^{n-1} \prod_{\ell=1}^{n} (X - x_\ell)$

. Donc, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\frac{T_n'}{T_n} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\lambda_\ell}{X - x_\ell}.$$

En multipliant par $X - x_\ell$ et en évaluant en x_ℓ, on a :

$$\lambda_\ell = \frac{T_n'(x_\ell)}{2^{n-1} Q_\ell(x_\ell)} = 1.$$

Donc : $\boxed{\frac{T_n'}{T_n} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{X - x_\ell}}.$

ii) . Comme $x \in [-1,1] \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$, on a : $|P(x)| \leq \frac{|T_n(x)|}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{|x - x_\ell|}$

Or : $\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{x - x_\ell} = \frac{T_n'(x)}{T_n(x)}$

. De plus, si $x \in [-1, x_n[$, alors : $\forall \ell \in [\![1,n]\!]$, $x - x_\ell < 0$

Donc $\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{|x - x_\ell|} = -\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{x - x_\ell} = \left| \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{x - x_\ell} \right|$

. si $x \in]x_1, 1]$, alors $\forall \ell \in [\![1,n]\!]$, $x - x_\ell > 0$

Donc $\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{|x - x_\ell|} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{x - x_\ell} = \left| \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{x - x_\ell} \right|.$

Donc $\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{|x - x_\ell|} = \left| \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{x - x_\ell} \right| = \frac{|T_n'(x)|}{|T_n(x)|}.$

Ainsi : $\boxed{|P(x)| \leq \frac{|T_n'(x)|}{n}}$

iii) Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

. Pour $n = 0$, $|\sin(n\theta)| = 0 \leq n |\sin \theta|$

. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $|\sin(n\theta)| \leq n |\sin \theta|$.

$$\begin{aligned} |\sin((n+1)\theta)| &= |\sin(n\theta)\cos\theta + \sin\theta\cos(n\theta)| \\ &\leq |\sin(n\theta)||\cos\theta| + |\sin\theta||\cos(n\theta)| \\ &\leq n|\sin\theta| + |\sin\theta| = (n+1)|\sin\theta| \end{aligned}$$

. Donc, par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ |\sin(n\theta)| \leq n|\sin\theta|}$

ii) Posons $\theta = \operatorname{Arccos} x$.

$|P(x)| \leq \dfrac{|T_n'(x)|}{n}$ or $|T_n'(x)| = |T_n'(\cos\theta)| = \left|\dfrac{n \sin(n\theta)}{\sin\theta}\right| \leq n^2$

D'où : $\boxed{|P(x)| \leq n}$

d-i) Par hypothèse, $|P(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Or $x \leq x_1$ donc $|P(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{1-x_1^2}}$

De plus $1 - x_1^2 = 1 - \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2n}\right) = \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$ et $\sin\dfrac{\pi}{2n} > 0$

Donc : $\boxed{|P(x)| \leq \dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}}$

ii) On a : $\left|\sin\left(n \cdot \dfrac{\pi}{2n}\right)\right| \leq n \left|\sin\dfrac{\pi}{2n}\right|$

Donc $1 \leq n \cdot \sin\dfrac{\pi}{2n}$, ainsi $\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}} \leq n$

D'où : $\boxed{|P(x)| \leq n}$.

e) On a : $\forall x \in [-1, x_n[\cup]x_1, 1]$, $|P(x)| \leq n$

et $\forall x \in [x_n, x_1]$, $|P(x)| \leq n$

Donc : $\boxed{\forall x \in [-1, 1], \quad |P(x)| \leq n}$