CORRECTION DS 1

Exercice 1 :

1) n est le carré d'un entier s'écrit : $\exists k \in \mathbb{N},\ n = k^2$.

Donc n n'est pas le carré d'un entier s'écrit : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ n \neq k^2.}$

2) On a P : $\boxed{(\exists k_1 \in \mathbb{N},\ n = k_1^2) \Rightarrow (\forall k_2 \in \mathbb{N},\ 2n \neq k_2^2)}$

3) La contraposée de P est : $\boxed{(\exists k_2 \in \mathbb{N},\ 2n = k_2^2) \Rightarrow (\forall k_1 \in \mathbb{N},\ n \neq k_1^2)}$

Supposons qu'il existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tel que $2n = k_2^2$ et qu'il existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n = k_1^2$. Alors $2k_1^2 = k_2^2$. De plus $n \neq 0$ donc $k_1 \neq 0$. Ainsi $2 = \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2$

Donc $\sqrt{2} = \frac{k_2}{k_1}$. Or $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ donc $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde.

Ainsi $\boxed{(\exists k_2 \in \mathbb{N},\ 2n = k_2^2) \Rightarrow (\forall k_1 \in \mathbb{N},\ n \neq k_1^2).}$

4) Comme la contraposée de P est vraie, alors $\boxed{P \text{ est vraie.}}$

Exercice 2 :

1) • Pour $n = 0$, $u_0 = 0 \in \mathbb{N}$

• Pour $n = 1$, $u_1 = 1 \in \mathbb{N}$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \in \mathbb{N}$ et $u_{n+1} \in \mathbb{N}$. Alors $u_{n+1} + 2u_n \in \mathbb{N}$.

Donc $u_{n+2} \in \mathbb{N}$.

Ainsi, par récurrence double : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{N}.}$

2) • L'équation caractéristique associée à (u_n) est : $x^2 - x - 2 = 0$.

Son discriminant est $\Delta = 9$, ses racines sont $\frac{1+3}{2} = 2$ et $\frac{1-3}{2} = -1$

Donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda . 2^n + \mu . (-1)^n$.

• $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ 2\lambda - \mu = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ -3\mu = 1 \end{cases} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \iff \begin{cases} \lambda = \frac{1}{3} \\ \mu = -\frac{1}{3} \end{cases}$

Ainsi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{3}\left(2^n - (-1)^n\right)}$

Exercice 3 :

$$(S)\ \begin{cases} x+y+az=1 \\ 3x+y+(a+2)z=1 \\ 3x+y+3z=a \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+az=1 & \\ -2y+(2-2a)z=-2 & L_2 \leftarrow L_2-3L_1 \\ -2y+(3-3a)z=a-3 & L_3 \leftarrow L_3-3L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+az=1 & \\ -2y+2(1-a)z=-2 & \\ (1-a)z=a-1 & L_3 \leftarrow L_3-L_2 \end{cases}$$

• Si $a \neq 1$

$$(S) \iff \begin{cases} x+y+az=1 & \\ y-(1-a)z=1 & L_2 \leftarrow -\frac{L_2}{2} \\ z=-1 & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=1 \\ y=a \\ z=-1 \end{cases}$$

• Si $a=1$

$$(S) \iff \begin{cases} x+y+z=1 \\ -2y=-2 \end{cases} \iff \begin{cases} x+z=0 \\ y=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-z \\ y=1 \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions de (S) est :

$$\boxed{\begin{array}{l} \{(1,a,-1)\} \text{ si } a\neq 1 \\ \{(-z,1,z),\ z\in\mathbb{R}\} \text{ si } a=1. \end{array}}$$

Exercice 4 :

1) • f est continue sur l'intervalle $]-\infty,1]$

• f est dérivable et, soit $x\in]-\infty,1]$, on a : $f'(x)=e^{1-x}-xe^{1-x}=(1-x)e^{1-x}$.

Donc : $\forall x\in]-\infty,1[,\ f'(x)>0$ et $f'(1)=0$.

Ainsi f est strictement croissante sur $]-\infty,1]$.

• Donc f est bijective de $]-\infty,1]$ vers $I=]\lim\limits_{-\infty} f,\ f(1)]$

Or $f(1)=1$ et $\lim\limits_{-\infty} f=-\infty$.

Donc $\boxed{f \text{ est bijective de }]-\infty,1] \text{ vers } I=]-\infty,1].}$

2) On a $f(-1) = -e^2$ et $-1 \in]-\infty, 1]$ donc $\boxed{g(-e^2) = -1}$

3) • f est dérivable sur $]-\infty, 1[$

• f est bijective de $]-\infty, 1[$ vers $]-\infty, 1[$.

• $\forall x \in]-\infty, 1[, \quad f'(x) \neq 0$.

Donc $\boxed{g \text{ est dérivable sur }]-\infty, 1[.}$

4) $g'(-e^2) = \dfrac{1}{f'(g(-e^2))} = \dfrac{1}{f'(-1)}$. Or $f'(-1) = 2e^2$.

Donc $\boxed{g'(-e^2) = \dfrac{1}{2e^2}}$

Exercice 5 :

• Pour $n = 0$, $\quad f(101-0) = f(101) = 101 - 10 = 91$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $\forall k \in [\![0, n]\!], \quad f(101-k) = 91$.

$f(101-(n+1)) = f(100-n)$.

Or $100 - n \leq 100$ donc $f(101-(n+1)) = f(f(100-n+11)) = f(f(111-n))$

• si $n < 11$, alors $111 - n > 100$ donc $f(101-(n+1)) = f(111-n-10) = f(101-n)$

Or, comme $n \in [\![0, n]\!]$, $f(101-n) = 91$. Donc $f(101-(n+1)) = 91$

• si $n \geq 11$, $f(111-n) = f(101-(n-10))$

Or $n - 10 \in [\![0, n]\!]$ donc $f(101-(n-10)) = 91$.

Ainsi $f(101-(n+1)) = f(91) = f(101-10)$.

Or $10 \in [\![0, n]\!]$ donc $f(101-10) = 91$.

D'où $f(101-(n+1)) = 91$

• Dans tous les cas, $f(101-(n+1)) = 91$.

• Ainsi, par récurrence forte :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(101-n) = 91}$$

Problème 1 :

1-a) f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f_n'(x) = \frac{4n e^{nx}(e^{nx}+7) - 4e^{nx} \cdot n e^{nx}}{(e^{nx}+7)^2} = \frac{28n e^{nx}}{(e^{nx}+7)^2} > 0$$

Donc $\boxed{f_n \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$

b) • Soit $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{e^{nx} \times 4}{e^{nx}(1+7e^{-nx})} = \dfrac{4}{1+7e^{-nx}}$

Donc $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 4}$

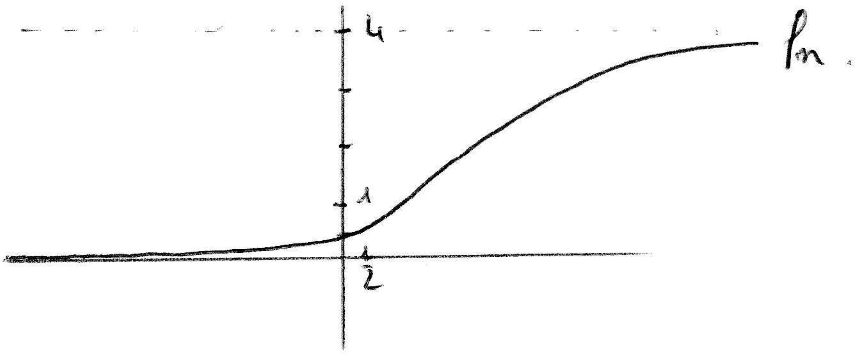
• $\boxed{\lim_{x \to -\infty} f_n(x) = 0}$

c) On a $f_n(0) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ et $f_n'(0) = \dfrac{28n}{8^2} = \dfrac{7n}{16}$

Donc la tangente recherchée a pour équation :

$$\boxed{y = \frac{7n}{16} x + \frac{1}{2}}$$

d)



2-a) • f_n est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$

• f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

• Donc f_n est bijective de $\mathbb{R}$ vers $I =]\lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f[$.

D'où : $\boxed{f_n \text{ est bijective de } \mathbb{R} \text{ vers } I =]0,4[.}$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $y \in]0,4[$,

$$y = f_n(x) \iff y = \frac{4e^{nx}}{e^{nx}+7} \iff (e^{nx}+7)y = 4e^{nx}$$

$$\iff e^{nx}(4-y) = 7y$$

$$\iff e^{nx} = \frac{7y}{4-y} \quad \text{car } y \neq 4$$

$$\iff nx = \ln\left(\frac{7y}{4-y}\right) \quad \text{car } \frac{7y}{4-y} > 0$$

$$\iff x = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{7y}{4-y}\right)$$

Ainsi $\boxed{f_n^{-1} :]0,4[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{n}\ln\left(\frac{7y}{4-y}\right)}$

c) f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc :

$\boxed{f_n^{-1} \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$,

· $$g_n(-x) = f_n\left(\frac{\ln 7}{n}+x\right) - 2 = \frac{4e^{n(\frac{\ln 7}{n}+x)}}{e^{n(\frac{\ln 7}{n}+x)}+7} - 2 = \frac{4e^{\ln 7+nx}}{e^{\ln 7+nx}+7} - 2$$

$$= \frac{4\times 7e^{nx}}{7e^{nx}+7} - 2 = \frac{4e^{nx}}{e^{nx}+1} - 2 = \frac{4e^{nx}-2(e^{nx}+1)}{e^{nx}+1}$$

$$= \frac{2e^{nx}-2}{e^{nx}+1}$$

· $$-g_n(x) = -f_n\left(\frac{\ln 7}{n}-x\right) + 2 = -\frac{4e^{n(\frac{\ln 7}{n}-x)}}{e^{n(\frac{\ln 7}{n}-x)}+7} + 2 = -\frac{4e^{\ln 7-nx}}{e^{\ln 7-nx}+7} + 2$$

$$= -\frac{4\times 7e^{-nx}}{7e^{-nx}+7} + 2 = -\frac{4e^{-nx}}{e^{-nx}+1} + 2 = -\frac{4}{1+e^{nx}} + 2$$

$$= \frac{-4+2(1+e^{nx})}{1+e^{nx}} = \frac{2e^{nx}-2}{1+e^{nx}} = g_n(-x)$$

Donc $\boxed{g_n \text{ est impaire.}}$

4-a) Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = 2$.

. Pour $n=1$, $f_1(x) = 2$ donc $x = f_1^{-1}(2) = \ln\left(\frac{7\times 2}{4-2}\right) = \ln(7)$, car $2 \in]0,4[$.

. Pour $n=2$, $f_2(x) = 2$ donc $x = f_2^{-1}(2) = \frac{1}{2}\ln(7)$

Donc $\ln(7) = \frac{1}{2}\ln(7)$, ainsi $\ln 7 = 0$ ce qui est absurde.

Donc $\boxed{\text{la proposition suivante est fausse : } \exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = 2.}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, posons $x = f_n^{-1}(2)$, car $2 \in]0,4[$. Alors $f_n(x) = 2$.

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x \in \mathbb{R}, f_n(x) = 2}$

Problème 2 :

1) . Analyse : Supposons qu'il existe f involution de $\mathbb{Z}$ strictement croissante.

Soit $n \in \mathbb{Z}$.

. supposons $f(n) < n$, alors comme f strictement croissante, $f \circ f(n) < f(n)$

Or $f(n) < n$ donc $f \circ f(n) < n$ ce qui est absurde. Ainsi $f(n) \geq n$.

. supposons $f(n) > n$, alors comme f est strictement croissante, $f \circ f(n) > f(n)$.

Or $f(n) > n$ donc $f \circ f(n) > n$ ce qui est absurde. Ainsi $f(n) = n$.

Donc $f : \begin{array}{l} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto n \end{array}$.

. Synthèse : Posons $f : \begin{array}{l} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto n \end{array}$.

Alors f est strictement croissante et : $\forall n \in \mathbb{Z}, f \circ f(n) = f(n) = n$

donc f est une involution de $\mathbb{Z}$.

. Conclusion : $\boxed{\text{Il existe une unique involution de } \mathbb{Z} \text{ strictement croissante et il s'agit de } \begin{array}{l} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto n \end{array}.}$

2-a) Soit f une involution de $\mathbb{Z}$. Supposons f paire.

Soit $n \in \mathbb{Z}$, $f \circ f(-n) = f \circ f(n) = n$. Or f est une involution donc $f \circ f(-n) = -n$

Ainsi $n = -n$ donc $n = 0$ ce qui est absurde.

Ainsi : $\boxed{f \text{ n'est pas paire.}}$

b) Soit f une involution de $\mathbb{Z}$. Supposons f périodique. Alors il existe $T \in \mathbb{R}^*$ tel que f soit T-périodique.

Soit $n \in \mathbb{Z}$, on a $f \circ f(n+T) = f \circ f(n) = n$ et $f \circ f(n+T) = n+T$.

Donc $n = n+T$ ainsi $T = 0$ ce qui est absurde.

Donc $\boxed{f \text{ n'est pas périodique.}}$

3- Soit $N \in \mathbb{N}$.

- Existence : Posons $n = f(N)$ alors $n \in \mathbb{Z}$ et $f(n) = f \circ f(N) = N$. Donc n convient.
- Unicité : Supposons qu'il existe $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $f(n_1) = N$ et $f(n_2) = N$.

  Alors $f \circ f(n_1) = f(N)$ et $f \circ f(n_2) = f(N)$ donc $f \circ f(n_1) = f \circ f(n_2)$.

  Or f est une involution donc $n_1 = n_2$. D'où l'unicité.

Ainsi : $\boxed{\forall N \in \mathbb{Z}, \exists! n \in \mathbb{Z}, f(n) = N}$

4-a) Soit $n \in \mathbb{Z}$.

- f est strictement décroissante donc $f(n+1) < f(n)$ ainsi $f(n+1) \leq f(n) - 1$ car $f(n+1), f(n) \in \mathbb{Z}$.
- Supposons $f(n+1) < f(n) - 1$. On a alors $f(n+1) < f(n+1)+1 < f(n)$

  Or $f(n+1)+1 \in \mathbb{Z}$ donc, d'après 3, il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $f(n+1)+1 = f(n_0)$

  Ainsi $f(n+1) < f(n_0) < f(n)$.

  Or f est strictement décroissante donc $n < n_0 < n+1$ ce qui est absurde car $n, n_0 \in \mathbb{Z}$.
- Ainsi $\boxed{f(n+1) = f(n) - 1.}$

b) * Pour $n = 0$, $f(n) = f(0) = f(0) - n$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $f(n) = f(0) - n$.

  Alors $f(n+1) = f(n) - 1 = f(0) - n - 1 = f(0) - (n+1)$
- Donc, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = f(0) - n$.

* Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}, f(-n) = f(0) - (-n) = f(0) + n$

- Pour $n = 0$, $f(-n) = f(0) = f(0) + n$
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $f(-n) = f(0) + n$

$f(-(n+1)) = f(-n-1) = f(-n)+1$ (en appliquant à $-n-1$)

$= f(0)+n+1$.

- Donc, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(-n) = f(0)-(-n)$

* Ainsi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ f(n) = f(0)-n}$.

5-a) - Analyse : Soit f une involution strictement décroissante de $\mathbb{Z}$.

D'après 4-b), $\forall n \in \mathbb{Z},\ f(n) = f(0)-n$.

Posons $a = f(0)$. Ainsi $f : \begin{array}{l} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto a-n \end{array}$, et $a \in \mathbb{Z}$

- Synthèse : Soit $a \in \mathbb{Z}$, posons $f : \begin{array}{l} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto a-n \end{array}$.

Alors f est strictement décroissante et :

$\forall n \in \mathbb{Z},\ f\circ f(n) = f(a-n) = a-(a-n) = n$

Donc f est une involution de $\mathbb{Z}$.

- Conclusion : $\boxed{\text{les involutions de } \mathbb{Z} \text{ strictement décroissantes sont : } \begin{array}{l} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto a-n \end{array},\ a \in \mathbb{Z}.}$

b) D'après 1 et 5-a, $\boxed{\text{les involutions de } \mathbb{Z} \text{ strictement monotones sont : } \begin{array}{l} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto n \end{array} \text{ et } \begin{array}{l} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto a-n \end{array},\ a \in \mathbb{Z}.}$

c) - $n \mapsto n$ est impaire.

- Soit $a \in \mathbb{Z}$. Posons $f : \begin{array}{l} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ a \mapsto a-n \end{array}$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$: $f(-n) = a+n$ et $-f(n) = -a+n$.

Donc f est impaire ssi $a=0$.

- Ainsi $\boxed{\text{les involutions de } \mathbb{Z} \text{ strictement monotones et impaires sont : } \begin{array}{l} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto n \end{array} \text{ et } \begin{array}{l} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto -n \end{array}.}$

6-a) Soit $n \in \mathbb{Z}$.

- si n pair $f \circ f(n) = f(n+1) = (n+1) - 1$ car $n+1$ impair.

  Donc $f \circ f(n) = n$

- si n impair $f \circ f(n) = f(n-1) = (n-1) + 1$ car $n-1$ pair

  Donc $f \circ f(n) = n$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{Z},\ f \circ f(n) = n$. Donc $\boxed{f \text{ est une involution de } \mathbb{Z}.}$

b) - $f(2) = 3$ et $f(3) = 2$ donc $f(2) > f(3)$ et $2 < 3$ ainsi f n'est pas strictement croissante.

- $f(1) = 0$ et $f(2) = 3$ donc $f(1) < f(2)$ et $1 < 2$ donc f n'est pas strictement décroissante.

Ainsi $\boxed{f \text{ n'est pas strictement monotone.}}$