CORRECTION DS 2

Exercice 1 :

1-a) On a : $d|x$ et $d|y$ donc il existe $u, v \in \mathbb{N}^*$ tels que :
$$\boxed{x = ud \text{ et } y = vd}$$

De plus $d = \text{pgcd}(x,y) = \text{pgcd}(ud, vd) = d\,\text{pgcd}(u,v)$. Ainsi $\boxed{\text{pgcd}(u,v) = 1.}$

b) On a $d|x$ et $x|\text{ppcm}(x,y)$. Donc $d|\text{ppcm}(x,y)$.

Ainsi, par combinaison linéaire $d|\text{ppcm}(x,y) + p.\text{pgcd}(x,y)$.

Donc $\boxed{d|2p.}$

c). Comme p est premier, on a : $d = 1$ ou $d = 2$ ou $d = p$ ou $d = 2p$.

- De plus $\text{ppcm}(x,y) = \dfrac{xy}{\text{pgcd}(x,y)} = \dfrac{ud.vd}{d} = uvd$.

Donc $uvd + pd = 2p$

- Si $d = 2$, on a donc $uvd + 2p = 2p$ donc $uvd = 0$ ce qui est absurde.
- Si $d = p$, on a donc $uvp + p^2 = 2p$ donc $uv + p = 2$.
  D'où $uv = 2 - p \leq 0$ ce qui est absurde.
- Si $d = 2p$, on a donc $2uvp + 2p^2 = 2p$ donc $uv + p = 1$.
  D'où $uv = 1 - p < 0$ ce qui est absurde.

Ainsi : $\boxed{d = 1.}$

d) Comme $uvd + pd = 2p$ et $d = 1$, on a $uv + p = 2p$. Donc $uv = p$.

Ainsi, comme p est premier : $\boxed{(u,v) = (1,p) \text{ ou } (p,1).}$

2. - Analyse : Supposons qu'il existe $(x,y) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $\text{ppcm}(x,y) + p.\text{pgcd}(x,y) = 2p$

Alors, d'après 1. $x = ud$, $y = vd$ avec $d = 1$ et $(u,v) = (1,p)$ ou $(p,1)$.

Donc $(x,y) = (1,p)$ ou $(p,1)$.

- Synthèse :
  - Posons $(x,y) = (1,p)$ alors $\text{pgcd}(x,y) = 1$ et $\text{ppcm}(x,y) = p$
    donc $\text{ppcm}(x,y) + p.\text{pgcd}(x,y) = p + p.1 = 2p$.
  - De même $(x,y) = (p,1)$ convient.

- Conclusion : les solutions sont $\boxed{(1,p) \text{ et } (p,1).}$

Exercice 2 :

- $\sqrt{\cdot}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$, Arctan est définie sur $\mathbb{R}$, Arccos est définie sur $[-1,1]$.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$,

$\frac{1-x}{1+x} \in [-1,1] \iff -1 \leq \frac{1-x}{1+x} \leq 1 \iff -1-x \leq 1-x \leq 1+x \iff -1 \leq 1$ et $-x \leq x$

ce qui est toujours vrai.

Donc la formule est définie sur $\boxed{\mathbb{R}^+.}$

- Posons $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - 2\operatorname{Arctan}(\sqrt{x})$

- $\sqrt{\cdot}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, Arccos est dérivable sur $]-1,1[$.

Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$\frac{1-x}{1+x} \in]-1,1[\iff -1 < \frac{1-x}{1+x} < 1 \iff -1-x < 1-x < 1+x \iff -1 < 1$ et $-x < x$

ce qui est toujours vrai. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$f'(x) = - \frac{\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}} - 2\,\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+(\sqrt{x})^2}$$

$$= - \frac{-2}{(1+x)^2\sqrt{\frac{(1+x)^2-(1-x)^2}{(1+x)^2}}} - \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$$

$$= \frac{2}{(1+x)\sqrt{4x}} - \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} = \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} = 0$$

Donc f est constante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

- Comme f est continue sur $\mathbb{R}^+$, f est constante sur $\mathbb{R}^+$.

- $f(0) = \operatorname{Arccos}(1) - 2\operatorname{Arctan}(0) = 0$. Donc $f = 0$.

- Ainsi : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 2\operatorname{Arctan}(\sqrt{x})}$.

Exercice 3 :

- Arccos et Arcsin sont définie sur $[-1,1]$ donc l'équation est définie sur :

$$\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right].$$

- **Analyse** : Supposons qu'il existe $x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ tel que : $\operatorname{Arcsin}(3x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(4x)$.

Alors : $\sin(\operatorname{Arcsin}(3x)) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(4x)\right)$.

Or : $\sin(\operatorname{Arcsin}(3x)) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(4x)\right)$

$\iff 3x = \cos(\operatorname{Arcsin}(4x)) \iff 3x = \sqrt{1-(4x)^2}$

$\iff \begin{cases} 9x^2 = 1 - 16x^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 25x^2 = 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \iff x = \frac{1}{5}.$

Donc $x = \frac{1}{5}$.

- **Synthèse** : Posons $x = \frac{1}{5}$.

On a : $\sin(\operatorname{Arcsin}(3x)) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(4x)\right)$.

Or $x \geq 0$ donc :

- $\operatorname{Arcsin}(3x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- $\operatorname{Arcsin}(4x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(4x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Or $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ est bijective et $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, donc :

$$\operatorname{Arcsin}(3x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(4x).$$

- **Conclusion** : L'unique solution est : $\boxed{x = \frac{1}{5}.}$

Exercice 4 :

1) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+3}{3} \right\rfloor - \lfloor x+1 \rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + 1 - (\lfloor x \rfloor + 1) \\ &= \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{f \text{ est 1-périodique.}}$

2) Soit $x \in [0,1[$. Alors $0 \leq \frac{x}{3} < 1$, $0 \leq \frac{x+1}{3} < 1$, $0 \leq \frac{x+2}{3} < 1$ et $0 \leq x < 1$

Donc $\lfloor \frac{x}{3} \rfloor = 0$, $\lfloor \frac{x+1}{3} \rfloor = 0$, $\lfloor \frac{x+2}{3} \rfloor = 0$ et $\lfloor x \rfloor = 0$.

Ainsi $\boxed{f(x) = 0}$

3) f est 1-périodique et $f = 0$ sur $[0,1[$ qui est de longueur 1. Ainsi $f = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Donc : $\boxed{\lfloor \frac{x}{3} \rfloor + \lfloor \frac{x+1}{3} \rfloor + \lfloor \frac{x+2}{3} \rfloor = \lfloor x \rfloor}$.

Exercice 5 :

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=1}^{n} sh(2+kx) = 0 \iff \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{2+kx} - e^{-2-kx}}{2} = 0$$

$$\iff e^2 \sum_{k=1}^{n} (e^x)^k - e^{-2} \sum_{k=1}^{n} (e^{-x})^k = 0$$

. Si $x = 0$, $\sum_{k=1}^{n} sh(2+kx) = \sum_{k=1}^{n} sh(2) = n\, sh(2) > 0$, donc $x = 0$ n'est pas solution.

. Si $x \neq 0$, $e^x \neq 1$ et $e^{-x} \neq 1$ donc :

$$\sum_{k=1}^{n} sh(2+kx) = 0 \iff e^2 \frac{e^x - e^{(n+1)x}}{1-e^x} = e^{-2} \frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}$$

$$\iff e^2 . e^x \frac{1-e^{nx}}{1-e^x} = e^{-2} \frac{e^{-(n+1)x}(e^{nx}-1)}{e^{-x}(e^x-1)}$$

$$\iff e^{2+x} \frac{1-e^{nx}}{1-e^x} = e^{-(2+nx)} \frac{1-e^{nx}}{1-e^x}$$

$$\iff e^{2+x} = e^{-(2+nx)}$$

$$\iff 2+x = -(2+nx)$$

$$\iff (n+1)x = -4$$

$$\iff x = -\frac{4}{n+1}$$

Donc l'unique solution est : $\boxed{x = -\frac{4}{n+1}}$.

Problème 1 :

1-a) $\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$. Donc $\frac{1}{\pi}\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$.

Ainsi : $\boxed{\frac{1}{\pi}\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{2}\right) \in \mathbb{Q}}$

b) $\frac{1}{p} \geq 0$ donc $\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{p}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ainsi : $\boxed{\frac{1}{\pi}\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{p}\right) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]}$

2- $\frac{1}{\pi}\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{a}{b}$ donc $b\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{p}\right) = \pi a$

Donc $\boxed{\cos\left(b \operatorname{Arccos}\frac{1}{p}\right) = \cos(\pi a) = (-1)^a}$

3-a) • $u_0 = \cos(0)$ donc $\boxed{u_0 = 1}$

• $u_1 = \cos\left(\operatorname{Arccos}\frac{1}{p}\right)$ donc $\boxed{u_1 = \frac{1}{p}}$

• $u_2 = \cos\left(2\operatorname{Arccos}\frac{1}{p}\right) = 2\cos^2\left(\operatorname{Arccos}\frac{1}{p}\right) - 1$ donc $\boxed{u_2 = \frac{2}{p^2} - 1}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} + u_n = \cos\left((n+2)\operatorname{Arccos}\frac{1}{p}\right) + \cos\left(n\operatorname{Arccos}\frac{1}{p}\right)$$

$$= \cos\left((n+1)\operatorname{Arccos}\frac{1}{p} + \operatorname{Arccos}\frac{1}{p}\right) + \cos\left((n+1)\operatorname{Arccos}\frac{1}{p} - \operatorname{Arccos}\frac{1}{p}\right)$$

$$= \cos\left((n+1)\operatorname{Arccos}\frac{1}{p}\right)\cos\left(\operatorname{Arccos}\frac{1}{p}\right) \cancel{- \sin\left((n+1)\operatorname{Arccos}\frac{1}{p}\right)\sin\left(\operatorname{Arccos}\frac{1}{p}\right)}$$

$$+ \cos\left((n+1)\operatorname{Arccos}\frac{1}{p}\right)\cos\left(\operatorname{Arccos}\frac{1}{p}\right) \cancel{+ \sin\left((n+1)\operatorname{Arccos}\frac{1}{p}\right)\sin\left(\operatorname{Arccos}\frac{1}{p}\right)}$$

$$= 2\cos\left((n+1)\operatorname{Arccos}\frac{1}{p}\right) \cdot \frac{1}{p}.$$

Donc $\boxed{u_{n+2} + u_n = \frac{2}{p} u_{n+1}}$.

4-a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $p^{n+2} u_{n+2} + p^{n+2} u_n = p^{n+2} \cdot \frac{2}{p} u_{n+1}$

Donc $p^{n+2} u_{n+2} + p^2 \cdot p^n u_n = 2 p^{n+1} u_{n+1}$

Ainsi $v_{n+2} + p^2 v_n = 2 v_{n+1}$.

Donc $\boxed{v_{n+2} = 2 v_{n+1} - p^2 v_n}$.

b) • $v_0 = u_0$ donc $\boxed{v_0 = 1}$.

• $v_1 = p u_1$ donc $\boxed{v_1 = 1}$

• $v_2 = p^2 u_2$ donc $\boxed{v_2 = 2 - p^2}$

• $v_3 = 2v_2 - p^2 v_1 = 4 - 2p^2 - p^2$ donc $\boxed{v_3 = 4 - 3p^2}$.

c) • Pour $n = 0$, $v_0 = 1 \in \mathbb{Z}$

• Pour $n = 1$, $v_1 = 1 \in \mathbb{Z}$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $v_n \in \mathbb{Z}$ et $v_{n+1} \in \mathbb{Z}$.

Alors comme $p \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = 2v_{n+1} - p^2 v_n \in \mathbb{Z}$.

• Donc, par récurrence double : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \in \mathbb{Z}}$

d) • Pour $n = 1$, $v_n - 2^{n-1} = v_1 - 1 = 0$ donc $p \mid (v_n - 2^{n-1})$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $p \mid (v_n - 2^{n-1})$.

$v_{n+1} - 2^n = 2v_n - p^2 v_{n-1} - 2^n = 2(v_n - 2^{n-1}) - p^2 v_{n-1}$.

Or $p \mid (v_n - 2^{n-1})$ et $p \mid p^2$ donc $p \mid (v_{n+1} - 2^n)$.

• Ainsi, par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p \mid (v_n - 2^{n-1})}$

e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $|u_n| = 1$, alors $|v_n| = p^n$

On a donc $p \mid |v_n|$. Ainsi $p \mid v_n$.

Or $p \mid (v_n - 2^{n-1})$ donc, par combinaison linéaire $p \mid 2^{n-1}$.

Or p premier donc $p = 2$ ce qui est absurde car $p \geqslant 3$.

Donc $\boxed{|u_n| \neq 1}$

5. D'après 2, $u_\ell = (-1)^a$ donc $|u_\ell| = 1$ et $\ell \in \mathbb{N}^*$ ce qui est absurde.

Donc : $\boxed{\frac{1}{\pi} \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{p}\right) \notin \mathbb{Q}.}$

Problème 2 :

1-a) Posons $f :]0,\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x - x$ et $g :]0,\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan x - x$

. f et g sont dérivables et, soit $x \in]0,\frac{\pi}{2}[$,

$$f'(x) = \cos x - 1 < 0 \quad , \quad g'(x) = \tan^2 x > 0$$

Donc f est strictement décroissante et g est strictement croissante.

. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ donc $f<0$ et $g>0$.

. Ainsi : $\boxed{\forall x \in]0,\frac{\pi}{2}[, \quad \sin x < x < \tan x .}$

b) Soit $x \in]0,\frac{\pi}{2}[$,

$$\begin{aligned}
2\cos(2x) + 2\tan^2(x) - 2 &= 2(1-2\sin^2(x)) + 2\tan^2(x) - 2 \\
&= -4\sin^2(x) + 2\tan^2(x) \\
&= 2\tan(x)\left(-2\sin(x)\cos(x) + \tan x\right) \\
&= 2\frac{\tan(x)}{\cos^2(x)}\left(-2\sin(x)\cos^3(x) + \sin(x)\cos(x)\right) \\
&= 2\tan(x)(1+\tan^2(x))\sin(x)\cos(x)(1-2\cos^2(x)) \\
&= \tan(x)(1+\tan^2(x))\sin(2x)(-\cos(2x)) \\
&= -\frac{1}{2}\tan x\,(1+\tan^2(x))\sin(4x)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{2\cos(2x) + 2\tan^2(x) - 2 = -\frac{1}{2}\tan x\,(1+\tan^2(x))\sin(4x)}$

c) Soit $x \in]0,\frac{\pi}{2}[$, $\frac{\tan x}{x} = \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}$. Or $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\cos x = 1$.

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{x} = 1}$

2-a) . $\sin$ et $\tan$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ donc f est deux fois dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$.

. Soit $x \in]0,\frac{\pi}{2}[$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2\cos x\sin x + \tan x + x(1+\tan^2 x) - 4x \\
&= \sin(2x) + \tan x + x(1+\tan^2 x) - 4x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= 2\cos(2x) + 1+\tan^2 x + 1+\tan^2 x + x \times 2\tan x(1+\tan^2 x) - 4 \\
&= 2\cos(2x) + 2\tan^2(x) - 2 + 2x\tan x(1+\tan^2 x)
\end{aligned}$$

Donc, d'après 1.b),

$$f''(x) = -\frac{1}{2}(1+\tan^2 x)\tan x \cdot \sin 4x + 2x\tan x(1+\tan^2(x))$$

$$\boxed{f''(x) = \frac{1}{2}\tan(x)(1+\tan^2 x)\,(4x - \sin 4x)}$$

b) Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

- $\tan x > 0$, $1+\tan^2 x > 0$ et d'après 1.a) $4x - \sin 4x > 0$

  Donc $f''(x) > 0$
- Ainsi f' est strictement croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 0$ donc $f' > 0$.
- Ainsi f est strictement croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ donc : $f > 0$.

Ainsi $\boxed{\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[,\ f(x) > 0}$

c) Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a : $\sin^2 x + x\tan x - 2x^2 > 0$

Donc $\sin^2 x + x\tan x > 2x^2$.

Ainsi $\boxed{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \frac{\tan x}{x} > 2}$.

d) Soit $m \in \mathbb{R}$, tel que : $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[,\ \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \frac{\tan x}{x} > m$

On a : $\lim\limits_{x \to 0^+}\left(\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \frac{\tan x}{x}\right) = 2$, donc, par passage à la limite :

$$2 \geq m.$$

Ainsi : $\boxed{\text{2 est le meilleur minorant.}}$

3-a). sin et tan sont dérivables et ne s'annulent pas sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. Donc g est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

- Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

$$g'(x) = \frac{2x \cdot \sin^2(x) - x^2 \cdot 2\cos x \cdot \sin x}{\sin^4 x} + \frac{\tan x - x(1+\tan^2 x)}{\tan^2 x}$$

$$= \frac{2x\sin x - 2x^2\cos x}{\sin^3 x} + \frac{\cos^2(x)\left(\tan x - x(1+\tan^2 x)\right)}{\sin^2 x}$$

9

$$g'(x) = \frac{1}{\sin^3 x}\left(2x\sin x - 2x^2\cos x + \sin x.\cos^2(x)\left(\tan x - x(1+\tan^2 x)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sin^3 x}\left(2x\sin x - 2x^2\cos x + \sin^2 x\cos x - x\sin x\right)$$

$$= \frac{1}{\sin^3 x}\left(x\sin x - 2x^2\cos x + \sin^2 x\cos x\right)$$

$$= \frac{x^2\cos x}{\sin^3 x}\left(\frac{1}{x}\frac{\sin x}{\cos x} - 2 + \frac{1}{x^2}\sin^2 x\right)$$

$$= \frac{x^2\cos x}{\sin^3 x}\left(\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \frac{\tan x}{x} - 2\right)$$

Donc $\boxed{h : x \mapsto \frac{x^2\cos x}{\sin^3 x} \quad \text{convient.}}$

b). Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, d'après 2.d, $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \frac{\tan x}{x} - 2 > 0$

et $h(x) = \frac{x^2\cos x}{\sin^3 x} > 0$.

Donc $g'(x) > 0$. Ainsi g strictement croissante.

. Comme $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$, alors $g > 0$.

Donc : $\boxed{\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 + \frac{x}{\tan x} > 2}$