CORRECTION
DS 4

Problème 1:

1) Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a $f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right)$

Or f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc f' est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et :

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{x^3} f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) f'\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

De plus, en appliquant (E) à $\frac{1}{x}$, on a : $f(x) = \frac{1}{x^2}\left(2 f'\left(\frac{1}{x}\right) + 1\right)$

donc $f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(x^2 f(x) - 1\right)$.

D'où :

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{x^3}\, x^2\left(2f'(x) + 1\right) - \frac{1}{x^4}\cdot\frac{1}{2}\left(x^2 f(x) - 1\right)\right)$$

$$= -\frac{2}{x} f'(x) - \frac{1}{x} - \frac{1}{4x^2} f(x) + \frac{1}{4x^4}$$

Donc $4x^4 f''(x) = -8x^3 f'(x) - 4x^3 - x^2 f(x) + 1$.

Ainsi $4x^4 f''(x) + 8x^3 f'(x) + x^2 f(x) = 1 - 4x^3$

Donc f est solution de : $\boxed{4x^4 y'' + 8x^3 y' + x^2 y = 1 - 4x^3.}$

2) Soit y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. On pose : $z : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto y(e^t) \end{array}$

z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$y(x) = z(\ln x)$, $\quad y'(x) = \frac{1}{x} z'(\ln x)$ $\quad$ et $y''(x) = -\frac{1}{x^2} z'(\ln x) + \frac{1}{x^2} z''(\ln x)$.

On a : $4x^4 y'' + 8x^3 y' + x^2 y = 1 - 4x^3$

$\iff \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ 4x^4\left(-\frac{1}{x^2} z'(\ln x) + \frac{1}{x^2} z''(\ln x)\right) + 8x^3 \cdot \frac{1}{x} z'(\ln x) + x^2 z(\ln x) = 1 - 4x^3$

$\iff \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ 4x^2 z''(\ln x) + 4x^2 z'(\ln x) + x^2 z(\ln x) = 1 - 4x^3$

$\iff \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ 4z''(\ln x) + 4z'(\ln x) + z(\ln x) = \frac{1}{x^2} - 4x$

$\underset{x = e^t \iff t = \ln x}{\iff} \forall t \in \mathbb{R},\ 4z''(t) + 4z'(t) + z(t) = e^{-2t} - 4e^t$.

$\iff 4z'' + 4z' + z = e^{-2t} - 4e^t$.

3) • On résout $4z'' + 4z' + z = 0$. L'équation caractéristique associée est :

$4r^2 + 4r + 1 = 0$. Son discriminant est $\Delta = 0$, sa racine est $-\frac{1}{2}$

Donc les solutions sont $t \mapsto (\lambda t+\mu)e^{-\frac{t}{2}}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ②

- Comme -2 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution de $4z''+4z'+z = e^{-2t}$ de la forme : $z : t \mapsto Ae^{-2t}$, $A \in \mathbb{R}$.

On a : $4z''+4z'+z = e^{-2t} \Leftrightarrow 16A - 8A + A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{9}$

Donc $t \mapsto \frac{1}{9}e^{-2t}$ est solution de $4z''+4z'+z = e^{-2t}$.

- Comme 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution de $4z''+4z'+z = -4e^{t}$ de la forme $z : t \mapsto Ae^{t}$, $A \in \mathbb{R}$.

On a : $4z''+4z'+z = -4e^{t} \Leftrightarrow 4A+4A+A = -4 \Leftrightarrow A = -\frac{4}{9}$

Donc $t \mapsto -\frac{4}{9}e^{t}$ est solution de $4z''+4z'+z = -4e^{t}$.

- D'après le principe de superposition, $t \mapsto \frac{1}{9}e^{-2t} - \frac{4}{9}e^{t}$ est solution de $4z''+4z'+z = e^{-2t}-4e^{t}$.

- Donc les solutions de $4z''+4z'+z = e^{-2t} - 4e^{t}$ sont :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto (\lambda t+\mu)e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{9}e^{-2t} - \frac{4}{9}e^{t} \end{aligned}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- Ainsi les solutions de (E') sont :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{R}^{+*} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (\lambda \ln x+\mu)e^{-\frac{\ln x}{2}} + \frac{1}{9}e^{-2\ln x} - \frac{4}{9}e^{\ln x} \\ &= \frac{\lambda \ln x+\mu}{\sqrt{x}} + \frac{1}{9x^2} - \frac{4x}{9}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}}$$

4) - Analyse : Supposons qu'il existe $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ dérivable vérifiant (E).

D'après 1, 2, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que : $f : \begin{aligned} \mathbb{R}^{+*} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\lambda \ln x+\mu}{\sqrt{x}} + \frac{1}{9x^2} - \frac{4}{9}x. \end{aligned}$

- Synthèse : Posons $f : \begin{aligned} \mathbb{R}^{+*} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\lambda \ln x+\mu}{\sqrt{x}} + \frac{1}{9x^2} - \frac{4x}{9} \end{aligned}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et, soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$f'(x) = \frac{\frac{\lambda}{x}\sqrt{x} - (\lambda \ln x+\mu)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} - \frac{2}{9x^3} - \frac{4}{9}.$$

$$= \frac{\lambda(2-\ln x)}{2x\sqrt{x}} - \frac{\mu}{2x\sqrt{x}} - \frac{2}{9x^3} - \frac{4}{9}$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2\left(2f'(x)+1\right)$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \sqrt{x}(-\lambda \ln x + \mu) + \frac{x^2}{9} - \frac{4}{9x} = x^2\left(\frac{\lambda(2-\ln x)}{x\sqrt{x}} - \frac{\mu}{x\sqrt{x}} - \frac{4}{9x^3} - \frac{8}{9} + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \cancel{-\lambda\sqrt{x}\ln x} + \mu\sqrt{x} + \cancel{\frac{x^2}{9}} - \cancel{\frac{4}{9x}} = 2\lambda\sqrt{x} - \cancel{\lambda\sqrt{x}\ln x} - \mu\sqrt{x} - \cancel{\frac{4}{9x}} + \cancel{\frac{1}{9}x^2}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad 2(\mu - \lambda)\sqrt{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \mu.$$

- Conclusion : Les solutions de (E) sont :

$$\boxed{f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{\lambda(\ln x + 1)}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{9x^2} - \dfrac{4}{9}x \end{array}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.}$$

Exercice 1 :

- Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$.

On a : $\begin{cases} x_1 + 2y_1 = x_2 + 2y_2 \\ y_1 - x_1 = y_2 - x_2 \\ 42 = 42 \end{cases}$. Ainsi $L_1 + L_2$ donne $3y_1 = 3y_2$ donc $y_1 = y_2$.

Et L_2 donne alors $x_1 = x_2$. Donc $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

Donc $\boxed{f \text{ est injective}}$

- Supposons qu'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x,y) = (0,0,0)$. Alors $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ y - x = 0 \\ 42 = 0 \end{cases}$

ce qui est absurde car $42 \neq 0$.

Donc $\boxed{f \text{ n'est pas surjective}}$

- Comme f n'est pas surjective, $\boxed{f \text{ n'est pas bijective}}$

Problème 2 :

1- Soit $X \in \mathcal{P}(E)$, $g\circ g(X) = g(\overline{X}) = \overline{\overline{X}} = X$ donc $g\circ g = Id_{\mathcal{P}(E)}$.

Ainsi $\boxed{g \text{ est bijective et } g^{-1} = g}$

2-a) Soit $X \in \mathcal{P}(E)$, $f(X) = (\overline{X} \cup \emptyset) \setminus B = \overline{X} \setminus B$ donc $\boxed{f : X \mapsto \overline{X} \cap \overline{B}}$

b) Soit $X \in \mathcal{P}(E)$, $f(X) = (\overline{X} \cup E) \setminus B = E \setminus B$ donc $\boxed{f : X \mapsto \overline{B}}$

c) Soit $X \in \mathcal{P}(E)$, $f(X) = (\overline{X} \cup A) \setminus \emptyset = \overline{X} \cup A$ donc $\boxed{f : X \mapsto \overline{X} \cup A}$

d) Soit $X \in \mathcal{P}(E)$, $f(X) = (\overline{X} \cup A) \setminus E$ donc $\boxed{f : X \mapsto \emptyset}$

3- $f(\emptyset) = (E \cup A) \setminus B = E \setminus B = \overline{B}$

$f(A) = (\overline{A} \cup A) \setminus B = E \setminus B = \overline{B}$

$f(B) = (\overline{B} \cup A) \setminus B = (\overline{B} \cup A) \cap \overline{B} = \overline{B}$ car $\overline{B} \subset \overline{B} \cup A$

$f(\overline{A}) = (A \cup A) \setminus B = A \setminus B$

$f(\overline{B}) = (B \cup A) \setminus B = (B \cup A) \cap \overline{B} = (B \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap \overline{B} = A \setminus B$

$f(E) = (\emptyset \cup A) \setminus B = A \setminus B$

Donc
$$\boxed{\begin{array}{l} f(\emptyset) = f(A) = f(B) = \overline{B} \\ f(\overline{A}) = f(\overline{B}) = f(E) = A \setminus B \end{array}}$$

4- Soit $X \in \mathcal{P}(E)$

$$\begin{aligned} f\circ f(X) &= f((\overline{X} \cup A) \cap \overline{B}) = (\overline{(\overline{X} \cup A) \cap \overline{B}} \cup A) \cap \overline{B} = ((X \cap \overline{A}) \cup B \cup A) \cap \overline{B} \\ &= (((X \cap \overline{A}) \cup A) \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B}) \\ &= (((X \cup A) \cap (\overline{A} \cup A)) \cap \overline{B}) \cup \emptyset \\ &= (X \cup A) \cap E \cap \overline{B} \\ &= (X \cup A) \cap \overline{B} \\ &= (X \cup A) \setminus B = f(\overline{X}) = f\circ g(X) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f\circ f = f\circ g.}$

5 - • Supposons f bijective. On a : $f\circ f = f\circ g$ donc $f^{-1}\circ f\circ f = f^{-1}\circ f\circ g$

Ainsi $Id_{\mathcal{P}(E)}\circ f = Id_{\mathcal{P}(E)}\circ g$. Donc $f = g$.

• Supposons $f = g$, alors d'après 1, f est bijective.

Donc $\boxed{f \text{ est bijective ssi } f = g}$.

6 - • Supposons f bijective, alors : $f = g$ donc : $\forall X \in \mathcal{P}(E)$, $f(X) = \overline{X}$.

Or $f(\emptyset) = \overline{B}$ donc $\overline{\emptyset} = \overline{B}$. Ainsi $B = \emptyset$

et $f(E) = A\setminus B = A\setminus\emptyset = A$ donc $\overline{E} = A$, ainsi $A = \emptyset$.

• Supposons $A = B = \emptyset$.

Alors : $\forall X \in \mathcal{P}(E)$, $f(X) = (\overline{X}\cup\emptyset)\setminus\emptyset = \overline{X}\cap\overline{\emptyset} = \overline{X}\cap E = \overline{X} = g(X)$

Donc $f = g$ et f est bijective.

Ainsi $\boxed{f \text{ est bijective ssi } A = B = \emptyset}$.

Problème 3 :

Partie 1 :

1-a) (u_n) est croissante et converge vers l donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq l$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} l \leq \frac{1}{n+1} l\cdot(n+1) \leq l$

Donc $\boxed{(v_n) \text{ est majorée par } l.}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n+1} u_k - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k = \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right)\sum_{k=0}^{n} u_k + \frac{u_{n+1}}{n+2}$$

$$= -\frac{1}{(n+2)(n+1)}\sum_{k=0}^{n} u_k + \frac{u_{n+1}}{n+2}$$

$$= -\frac{1}{(n+2)(n+1)}\sum_{k=0}^{n} u_k + \frac{1}{(n+2)(n+1)}\sum_{k=0}^{n} u_{n+1}$$

$$= \frac{1}{(n+2)(n+1)}\sum_{k=0}^{n} (u_{n+1} - u_k).$$

Or (u_n) est croissante donc : $\forall k \in [\![0, n]\!]$ $u_k \leq u_{n+1}$.

Ainsi $v_{n+1} - v_n \geq 0$. Donc $\boxed{(v_n) \text{ est croissante.}}$

c) (v_n) est croissante et majorée par l donc, d'après le théorème de la limite monotone $\boxed{(v_n) \text{ converge vers } L \in \mathbb{R} \text{ avec } L \leq l.}$

2-a) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$2v_{2n+1} - v_n = \frac{2}{2n+2}\sum_{k=0}^{2n+1} u_k - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n+1}^{2n+1} u_k$$

$$\geq \frac{1}{n+1}\sum_{k=n+1}^{2n+1} u_n \quad \text{car } (u_n) \text{ croissante.}$$

$$\geq \frac{1}{n+1} u_n \left((2n+1) - (n+1) + 1 \right)$$

$$\geq u_n.$$

Donc $\boxed{2v_{n+1} - v_n \geq u_n.}$

b) Par passage à la limite $2L - L \geq l$ donc $L \geq l$. Ainsi $\boxed{L = l}$

c) On a donc montré que $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k = l.}$

Partie 2:

1-a) Posons $f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ on a : $\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) \in]0,+\infty[$ donc $]0,+\infty[$ est stable par f.

De plus $a_0 \in]0,+\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = f(a_n)$.

Donc $\boxed{(a_n) \text{ est bien définie et : } \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in]0,+\infty[.}$

b). Soit $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{1+a_n} \geq 1$ donc $a_{n+1} \leq a_n$, ainsi (a_n) est décroissante et minorée par 0. Donc $\boxed{(a_n) \text{ converge vers } l \in [0,+\infty[.}$

. Comme f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = f(a_n)$, on a : $l = f(l)$.

Or $l = f(l) \iff l = \frac{l}{\sqrt{1+l}} \iff l = 0$ ou $\sqrt{1+l} = 1 \iff l = 0$

Donc $\boxed{(a_n) \text{ converge vers } 0.}$

2- f est dérivable et, soit $x \in]0,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \cdot x - (\sqrt{1+x} - 1)}{x^2} = \frac{x - 2\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x} - 1)}{2x^2\sqrt{1+x}} = \frac{x - 2(1+x) + 2\sqrt{1+x}}{2x^2\sqrt{1+x}}$$

$$= \frac{-x - 2 + 2\sqrt{1+x}}{2x^2\sqrt{1+x}}$$

Posons $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto -x-2+2\sqrt{1+x}$. g est dérivable et, soit $x \in]0,+\infty[$,

$$g'(x) = -1 + \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leq 0 \quad \text{car } \sqrt{1+x} \geq 1$$

Donc g est décroissante et comme $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$, alors $g \leq 0$.

Donc $f' \leq 0$. Ainsi $\boxed{f \text{ est décroissante.}}$

3-a) $b_n = \frac{\sqrt{1+a_n}}{a_n} - \frac{1}{a_n} = \frac{\sqrt{1+a_n}-1}{a_n}$. Donc $\boxed{b_n = f(a_n)}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_{n+1} \leq a_n$ et f décroissante

donc $f(a_{n+1}) \geq f(a_n)$. Ainsi $b_{n+1} \geq b_n$.

Donc $\boxed{(b_n) \text{ est croissante.}}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \frac{\sqrt{1+a_n}-1}{a_n} = \frac{a_n}{a_n(\sqrt{1+a_n}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+a_n}+1}$

Or $\lim a_n = 0$, donc $\boxed{\lim b_n = \frac{1}{2}.}$

4-a) $c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}\right)$. Donc, par sommes télescopiques :

$$\boxed{c_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_0}\right)}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \frac{1}{na_n} - \frac{1}{na_0}$ donc $\frac{1}{na_n} = c_n + \frac{1}{na_0}$.

Ainsi $na_n = \frac{1}{c_n + \frac{1}{na_0}}$.

Or $\lim \frac{1}{na_0} = 0$ et, comme (b_n) est croissante, d'après la partie 1,

$\lim c_n = \lim b_n = \frac{1}{2}$. Donc $\boxed{\lim na_n = 2}$

Partie 3 :

1) Posons $h : x \mapsto x + \sqrt{x}$. On a : $\forall x \in]0,+\infty[$, $h(x) \in]0,+\infty[$ donc $]0,+\infty[$ est stable par h.

Comme $u_0 \in]0,+\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = h(u_n)$, alors

$\boxed{(u_n) \text{ est bien définie et } (u_n) \text{ est à valeurs dans }]0,+\infty[.}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n} \geq 0$ donc (u_n) est croissante.

Supposons (u_n) convergente vers $\ell \in \mathbb{R}^+$.

Comme h est continue, on a $h(\ell) = \ell$. Or $h(\ell) = \ell \Leftrightarrow \ell = \ell + \sqrt{\ell} \Leftrightarrow \ell = 0$

Donc $\lim u_n = 0$. Or : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_0$ donc $\ell \geq u_0 > 0$ ce qui est absurde.

Donc (u_n) est divergente et comme (u_n) est croissante, alors : $\boxed{\lim u_n = +\infty}$.

3) Posons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{u_n}}$.

On a : $a_0 > 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{u_{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{u_n + \sqrt{u_n}}} = \frac{1}{\sqrt{u_n}\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{u_n}}}}$

$$= \frac{a_n}{\sqrt{1 + a_n}}.$$

Donc, d'après la partie 2, $\lim n a_n = 2$.

Ainsi $\lim \frac{n}{\sqrt{u_n}} = 2$.

Donc $\boxed{\lim \frac{u_n}{n^2} = \frac{1}{4}}$.