CORRECTION DS 5

Exercice 1 :

1) Au voisinage de $+\infty$

$$\sqrt{x^4+x^2} - \sqrt{x^4+1} = \frac{x^2-1}{\sqrt{x^4+x^2}+\sqrt{x^4+1}} = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}$$

Donc : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+x^2}-\sqrt{x^4+1}\right) = \frac{1}{2}.}$

2) Au voisinage de 0^+ : $(1+x(\ln x)^2)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\frac{1}{\ln x}\ln(1+x(\ln x))^2} = e^{x\ln x.\frac{\ln(1+x(\ln x)^2)}{x(\ln x)^2}}$

Or $\lim_{x\to 0} x(\ln x)^2 = 0$ et $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ donc, par composition : $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x(\ln x)^2)}{x(\ln x)^2} = 1.$

De plus $\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$ donc $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$

Ainsi $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en } 0 \text{ en posant } f(0)=1.}$

3) . Comme $\lfloor . \rfloor$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, f est clairement continue sur $\mathbb{R}^+\setminus\mathbb{N}$.

. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim_{x\to n^-} f(x) = \frac{n-1}{n}$ or $f(n) = \frac{n}{n} = 1$ donc $\lim_{x\to n^-} f(x) \neq f(n)$.

Ainsi f n'est pas continue en n.

. Au voisinage de 0^+, $\lfloor x \rfloor = 0$ donc $f(x) = 0$.

Ainsi $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ donc f est continue en 0.

Ainsi $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+\setminus\mathbb{N}^*.}$

Problème 1 :

Partie 1 :

1) Soient $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $N = (n_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On a : $tr(MN) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} m_{i,k} n_{k,i}$

$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} n_{k,i} m_{i,k}$

$= tr(NM)$

Donc : $\boxed{tr(MN) = tr(NM)}$.

2) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$.

$tr(PMP^{-1}) = tr(P(MP^{-1})) = tr((MP^{-1})P)$ d'après 1.

$= tr(MP^{-1}P) = tr(M)$.

Donc $\boxed{tr(PMP^{-1}) = tr(M)}$.

Partie 2 :

3) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

Donc : $A^2 = A \iff \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} a^2+bc = a \\ b(a+d) = b \\ c(a+d) = c \\ bc+d^2 = d \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a^2+bc = a \\ b=0 \text{ ou } a+d=1 \\ c=0 \text{ ou } a+d=1 \\ bc+d^2 = d \end{cases}$$

- Si $a+d=1$, $A^2 = A \iff \begin{cases} a^2+bc = a \\ bc+(1-a)^2 = 1-a \end{cases}$. $\iff \begin{cases} a^2+bc = a \\ bc+1-2a+a^2 = 1-a \end{cases}$

$\iff a^2+bc = a$

- Si $a+d \neq 1$ $\quad A^2 = A \iff \begin{cases} a^2+bc = a \\ b = 0 \\ c = 0 \\ bc+d^2 = d \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = a \\ b = c = 0 \\ d^2 = d \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a, d \in \{0, 1\} \\ b = c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = b = c = d = 0 \\ \text{ou } (a = d = 1 \text{ et } b = c = 0) \end{cases}$

Donc les matrices telles que $A^2 = A$ sont :

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix} \text{ avec } a^2+bc = a, \ O_2 \text{ et } I_2.}$$

4) • Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix}$ avec $a^2+bc = a$, alors $\operatorname{tr} A = a+1-a = 1$

- Si $A = O_2$ alors $\operatorname{tr} A = 0$
- Si $A = I_2$ alors $\operatorname{tr} A = 2$.

Dans tous les cas : $\boxed{\operatorname{tr}(A) \in \{0, 1, 2\}}$

5-a) D'après 4, $\boxed{\begin{cases} A^2 = A \\ \operatorname{tr} A = 0 \end{cases} \iff A = O_2}$

b) D'après 4, $\boxed{\begin{cases} A^2 = A \\ \operatorname{tr} A = 2 \end{cases} \iff A = I_2}$

6- • Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix}$ avec $a^2+bc = a$.

On a : $a(1-a) - bc = a - a^2 - bc = 0$ donc $A \notin GL_2(\mathbb{R})$.

- Si $A = O_2$ alors $A \notin GL_2(\mathbb{R})$
- Si $A = I_2$ alors $A \in GL_2(\mathbb{R})$.

Donc $A \in GL_2(\mathbb{R}) \iff A = I_2$.

Et, d'après 5, $\boxed{A \in GL_2(\mathbb{R}) \iff \operatorname{tr} A = 2}$

Partie 3 :

7- $\operatorname{tr}(A) = \frac{1}{4}(3+3+2)$ donc $\boxed{\operatorname{tr} A = 2}$

7-a)

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow -\frac{1}{2} L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{matrix}$$

Donc $\boxed{P \text{ est inversible et } P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$

b)

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 12 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 8 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Donc $D = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$, ainsi $\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

c) D est diagonale et admet un coefficient diagonal non nul donc $D \notin GL_3(\mathbb{R})$.

Si $A \in GL_3(\mathbb{R})$, comme $P \in GL_3(\mathbb{R})$, on a : $D = P^{-1}AP \in GL_3(\mathbb{R})$ ce qui est absurde. Donc : $\boxed{A \notin GL_3(\mathbb{R})}$

9) On a : $A = PDP^{-1}$ donc $A^2 = PD^2P^{-1}$

Or $D^2 = D$ donc $A^2 = PDP^{-1}$. Ainsi $\boxed{A^2 = A}$

10-a) • $I_3 + A = I_3 + PDP^{-1} = PP^{-1} + PDP^{-1} = P(I_3 + D)P^{-1}$

Or $I_3 + D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R})$ et $(I_3 + D)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = I_3 - \frac{1}{2}D$

Donc : $\boxed{I_3 + A \in GL_3(\mathbb{R})}$.

• $(I_3 + A)^{-1} = \left(P(I_3 + D)P^{-1}\right)^{-1} = P(I_3 + D)^{-1}P^{-1} = P(I_3 - \frac{1}{2}D)P^{-1}$

$= PP^{-1} - \frac{1}{2}PDP^{-1} = I_3 - \frac{1}{2}A$

Donc $\boxed{(I_3 + A)^{-1} = I_3 - \frac{1}{2}A}$

b) Comme $A^2 = A$, $A(I_3 - A) = 0_3$. Donc $\boxed{I_3 - A \notin GL_3(\mathbb{R})}$.

11-a) • $I_3 + A = PP^{-1} + PDP^{-1} = P(I_3 + D)P^{-1}$

Posons $D_1 = I_3 + D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, alors $\boxed{I_3 + A = PD_1P^{-1}}$

• $I_3 - A = PP^{-1} - PDP^{-1} = P(I_3 - D)P^{-1}$

Posons $D_2 = I_3 - D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $\boxed{I_3 - A = PD_2P^{-1}}$.

b) $(I_3 + A)^n = PD_1^nP^{-1}$

Or D_1 est diagonale donc $D_1^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 0 \\ 2^n & -1 & 2^{n+1} \\ 0 & 1 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\times 2^n+1 & 2^n-1 & 2-2^{n+1} \\ 2^n-1 & 3\times 2^n+1 & 2^{n+1}-2 \\ 1-2^n & 2^n-1 & 2^{n+1}+2 \end{pmatrix}$$

Donc $$\boxed{(I_3 + A)^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3\times 2^n+1 & 2^n-1 & 2-2^{n+1} \\ 2^n-1 & 3\times 2^n+1 & 2^{n+1}-2 \\ 1-2^n & 2^n-1 & 2^{n+1}+2 \end{pmatrix}}$$

c) $(I_3 - A)^n = P D_2^n P^{-1}$

Or D_2 est diagonale donc $D_2^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D_2$.

Ainsi $(I_3 - A)^n = P D_2^n P^{-1} = I_3 - A$.

Donc $\boxed{(I_3 - A)^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$

Partie 4 :

12). Supposons $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Comme $A^2 = A$ alors $A^2 A^{-1} = A A^{-1}$ donc $A = I_n$.

- Soit $A = I_n$, alors $A^2 = I_n = A$ et pour $P \in GL_n(\mathbb{R})$, $P^{-1}AP = I_n$ est diagonale.

Donc la seule matrice inversible vérifiant ces hypothèses est :

$\boxed{A = I_n.}$

13) D'après 2, $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} D$.

De plus $D^2 = P^{-1} A^2 P = P^{-1}AP = D$.

Posons $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. On a donc : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k^2 = \lambda_k$.

Donc : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k \in \{0, 1\}$.

Or $\operatorname{tr} D = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$. Donc $\operatorname{tr} D \in [\![0, n]\!]$.

Ainsi : $\boxed{\operatorname{tr} A \in [\![0, n]\!].}$

14- D'après 12, $A \in GL_n(\mathbb{R}) \iff A = I_n$.

De plus
$$\begin{aligned} \operatorname{tr} A = n &\iff \forall k \in [\![1, n]\!], \lambda_k = 1 \\ &\iff D = I_n \\ &\iff A = P I_n P^{-1} \\ &\iff A = I_n. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{A \in GL_n(\mathbb{R}) \iff \operatorname{tr} A = n.}$

15-a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $(I_3 + A)(aI_3 + bA) = aI_3 + (a + 2b)A$

Posons $a = 1$ et $b = -\frac{1}{2}$, on a : $(I_3 + A)(aI_3 + bA) = I_3$.

Donc $\boxed{I_3 + A \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ et } (I_3 + A)^{-1} = aI_3 + bA = I_3 - \tfrac{1}{2}A.}$

b) Comme $A^2 = A$, $(I_3 - A)A = 0_n$

donc $\boxed{I_3 - A \notin GL_n(\mathbb{R})}$

16-a) Comme $I_3 A = A I_3$, d'après la formule du binôme de Newton :

$$(I_3 + A)^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} A^k$$

Or $A^2 = A$ donc : $\forall k \geq 1$, $A^k = A$

Ainsi $(I_3 + A)^r = I_3 + \sum_{k=1}^{r} \binom{r}{k} A$

$= I_3 + (2^r - 1) A$

Donc $\boxed{(I_3 + A)^r = I_3 + (2^r - 1) A.}$

b) $(I_3 - A)^2 = I_3 - 2A + A^2 = I_3 - 2A + A = I_3 - A$

Donc $\boxed{(I_3 - A)^r = I_3 - A.}$

Partie 5 :

17. Posons $E_{r,s} E_{k,l} = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$,

$$a_{i,j} = \sum_{m=1}^{n} \delta_{i,r}\, \delta_{m,s}\, \delta_{m,k}\, \delta_{j,l} = \delta_{i,r}\, \delta_{j,l} \sum_{m=1}^{n} \delta_{m,s}\, \delta_{m,k}$$

$= \delta_{i,r}\, \delta_{j,l}\, \delta_{s,k}$

$= \delta_{s,k} \cdot \underbrace{\delta_{i,r}\, \delta_{j,l}}_{\text{terme } (i,j) \text{ de } E_{r,l}}$

Donc $\boxed{E_{r,s} E_{k,l} = \delta_{s,k} E_{r,l}.}$

18-a) $E_{r,r}^2 = E_{r,r} E_{r,r} = \delta_{r,r} E_{r,r} = E_{r,r}$

donc $\boxed{E_{r,r} \in \mathcal{E}}$

b) $(E_{r,r} + E_{r,s})^2 = E_{r,r}^2 + E_{r,r} E_{r,s} + E_{r,s} E_{r,r} + E_{r,s}^2$

$= \delta_{r,r} E_{r,r} + \delta_{r,r} E_{r,s} + \delta_{s,r} E_{r,r} + \delta_{s,r} E_{r,s}$

$= E_{r,r} + E_{r,s}$ car $r \neq s$

Donc $\boxed{E_{r,r} + E_{r,s} \in \mathcal{E}.}$

19- Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$M = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} m_{r,s} E_{r,s}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} m_{r,r} E_{r,r} + \sum_{r=1}^{n} \sum_{s \in [\![1,n]\!] \setminus \{r\}} m_{r,s} E_{r,s}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} m_{r,r} E_{r,r} + \sum_{r=1}^{n} \sum_{s \in [\![1,n]\!] \setminus \{r\}} m_{r,s} (E_{r,s} + E_{r,r} - E_{r,r})$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \Big(m_{r,r} - \sum_{s \in [\![1,n]\!] \setminus \{r\}} m_{r,s} \Big) \underbrace{E_{r,r}}_{\in \mathcal{E}} + \sum_{r=1}^{n} \sum_{s \in [\![1,n]\!] \setminus \{r\}} m_{r,s} \underbrace{(E_{r,s} + E_{r,r})}_{\in \mathcal{E}}$$

Donc $\boxed{\text{M est combinaison linéaire d'éléments de } \mathcal{E}.}$

20) Posons $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$. Supposons que M soit une somme d'éléments de $\mathcal{E}$.

Alors tr M est une somme d'éléments de $[\![0,n]\!]$ d'après 13.

Donc $\mathrm{tr}\, M \in \mathbb{N}$. Ainsi $\frac{1}{2} \in \mathbb{N}$ ce qui est absurde.

Donc $\boxed{\text{toute matrice n'est pas somme d'éléments de } \mathcal{E}.}$

Problème 2 :

1- Soit $f = c$, $c \in \mathbb{R}$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(\sqrt{x^2+y^2}) = f(x) f(y) \iff c = c \cdot c$

$\iff c = 0$ ou $c = 1$.

Donc $\boxed{\text{les fonctions constantes vérifiant } (*) \text{ sont } 0 \text{ et } 1}$

2- Comme $f \neq 0$, il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(y_0) \neq 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. En appliquant $(*)$ à (x, y_0), on a : $f(\sqrt{x^2+y_0^2}) = f(x) f(y_0)$

Donc $f(x) = \dfrac{f(\sqrt{x^2+y_0^2})}{f(y_0)}$.

Ainsi $f(-x) = \dfrac{f(\sqrt{(-x)^2+y_0^2})}{f(y_0)} = \dfrac{f(\sqrt{x^2+y_0^2})}{f(y_0)} = f(x)$.

Donc $\boxed{f \text{ est paire}}$

3) En appliquant (*) à $(0,0)$, on a : $f(0)=f(0)^2$ donc $f(0)\in\{0,1\}$.
Si $f(0)=0$, soit $x\in\mathbb{R}$, $f(\sqrt{x^2+0^2})=f(x)f(0)$ donc $f(|x|)=0$
Donc : $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $f(x)=0$. De plus f est paire donc $f=0$ ce qui est absurde.
Ainsi $f(0)\neq 0$. Donc $\boxed{f(0)=1}$.

4) a) • Pour $n=0$, $f(x_n)=f(x_0)=0$
• Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $f(x_n)=0$.
On a $f(\sqrt{x_{n+1}^2+x_{n+1}^2})=f(x_{n+1})f(x_{n+1})$
Donc $f(x_{n+1})^2=f\left(\sqrt{\frac{x_0^2}{2^{n+1}}+\frac{x_0^2}{2^{n+1}}}\right)=f\left(\frac{x_0}{\sqrt{2^n}}\right)=f(x_n)=0$.
D'où $f(x_{n+1})=0$.
• Ainsi, par récurrence : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ f(x_n)=0}$

b) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=0$ et f est continue. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=f(0)$.
Ainsi $0=1$ ce qui est absurde.
Donc : $\boxed{f \text{ ne s'annule pas sur } \mathbb{R}^{+*}}$

5- • f est continue et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f est de signe constant sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Comme $f(0)=1>0$, alors : $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}$, $f(x)>0$.
• Comme $f(0)>0$, on a : $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $f(x)>0$.
• Comme f est paire : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)>0}$.

6-a) $\sqrt{\cdot}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$
f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$
$\ln$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Donc $\boxed{g \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}^+}$.

b) Soit $(x,y)\in(\mathbb{R}^+)^2$
$g(x+y)=\ln(f(\sqrt{x+y}))=\ln\left(f\left(\sqrt{\sqrt{x}^2+\sqrt{y}^2}\right)\right)=\ln(f(\sqrt{x})f(\sqrt{y}))$
$=\ln(f(\sqrt{x}))+\ln(f(\sqrt{y}))=g(x)+g(y)$

Donc : $\boxed{\forall (x,y)\in(\mathbb{R}^+)^2,\ g(x+y)=g(x)+g(y)}$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

- Pour $n=0$, $g(nx) = g(0) = \ln(f(0)) = \ln(1) = 0 = n g(x)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $g(nx) = n g(x)$.

$g((n+1)x) = g(nx+x) = g(nx) + g(x) = n g(x) + g(x) = (n+1) g(x)$.

- Donc, par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ g(nx) = n g(x).}$

d) Soit $x \in \mathbb{Q}^+$. Il existe $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = \frac{p}{q}$.

$g(p) = g(qx) = q g(x)$ d'après c.

De plus $g(p) = g(p \cdot 1) = p g(1)$ d'après c.

Donc $p g(1) = q g(x)$. Ainsi $g(x) = \frac{p}{q} g(1)$, donc $\boxed{g(x) = x g(1)}$

e) Soit $x \in \mathbb{R}^+$, il existe (x_n) suite de $\mathbb{Q}^+$ telle que $\lim x_n = x$.

Comme g est continue sur $\mathbb{R}^+$, alors $\lim g(x_n) = g(x)$

Donc $g(x) = \lim x_n g(1) = x g(1)$.

Posons $a = g(1)$. On a : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g(x) = ax.}$

7. - Soit $x \in \mathbb{R}^+$, $\ln(f(\sqrt{x})) = ax$ donc $f(\sqrt{x}) = e^{ax}$

Ainsi $f(x) = f(\sqrt{x^2}) = e^{ax^2}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}^-$, comme f est paire $f(x) = f(-x) = e^{a(-x)^2}$ car $-x \in \mathbb{R}^+$

$= e^{ax^2}$.

Donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{ax^2}.}$

8. - Analyse : Supposons qu'il existe f solution du problème.

D'après 1 et 7, $f = 0$ ou $f = 1$ ou $f : x \mapsto e^{ax^2}$, $a \in \mathbb{R}$

Or $f = 1$ est de la forme $f : x \mapsto e^{ax^2}$ avec $a = 0$, donc $f = 0$ ou $f : x \mapsto e^{ax^2}$, $a \in \mathbb{R}$.

- Synthèse : - $f = 0$ est solution du problème.
  - Posons $f : x \mapsto e^{ax^2}$, $a \in \mathbb{R}$. Alors f est continue et, soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$f(\sqrt{x^2+y^2}) = e^{a(x^2+y^2)} = e^{ax^2} e^{ay^2} = f(x) f(y)$. Donc f convient.

- Conclusion : Les solutions sont :

$$\boxed{0 \text{ et } \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{ax^2} \end{array},\ a \in \mathbb{R}.}$$