CORRECTION
DS 6

Exercice 1 :

1) • f est dérivable sur $]a,b[$, $x \mapsto \frac{1}{x-b}$ est dérivable sur $]a,b[$ et exp est dérivable sur $\mathbb{R}$

donc $\boxed{h \text{ est dérivable sur }]a,b[.}$

• Soit $x \in]a,b[$,

$$h'(x) = f'(x) e^{\frac{1}{x-b}} + (f(x)-f(a)) \cdot \left(-\frac{1}{(x-b)^2}\right) e^{\frac{1}{x-b}}$$

Donc : $$\boxed{h'(x) = \left(f'(x) - \frac{f(x)-f(a)}{(x-b)^2}\right) e^{\frac{1}{x-b}}}$$

2) • $\lim\limits_{x \to b^-} \frac{1}{x-b} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to b^-} e^{\frac{1}{x-b}} = 0$.

Comme f est continue en b, $\lim\limits_{x \to b} (f(x) - f(a)) = f(b) - f(a)$.

Ainsi $\lim\limits_{x \to b^-} h(x) = 0$.

Donc h est prolongeable par continuité en posant $h(b) = 0$.

• h est clairement continue sur $[a,b[$ donc h est continue sur $[a,b]$.

• h est dérivable sur $]a,b[$.

• $h(a) = 0 = h(b)$

• Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$

c'est-à-dire : $$\boxed{f'(c) = \frac{f(c)-f(a)}{(c-b)^2}}$$

Exercice 2 :

• Analyse : Supposons qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X+1) - P(X-1) = X^2+1$.

• Comme 0 n'est pas solution, $P \neq 0$. Posons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n = \deg P$.

• On a : $\deg(P(X+1) - P(X-1)) \leq \deg P = n$.

Le coefficient de X^n dans $P(X+1) - P(X-1)$ est : $a_n - a_n = 0$

Donc $\deg(P(X+1) - P(X-1)) \leq n-1$.

• Si $n = 0$, alors P est constant et $P(X+1) - P(X-1) = 0$ donc $n \neq 0$

• Le coefficient de X^{n-1} dans $P(X+1) - P(X-1)$ est : $na_n + a_{n-1} - (-na_n + a_{n-1}) = 2na_n \neq 0$

Donc $\deg(P(X+1)-P(X-1)) = n-1$.

- Ainsi $\deg(X^2+1) = n-1$ donc $2 = n-1$, d'où $n=3$.

- Synthèse : Posons $P = aX^3+bX^2+cX+d$, $a,b,c,d \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$.

$$P(X+1)-P(X-1) = X^2+1 \iff a(X+1)^3+b(X+1)^2+c(X+1)+d - a(X-1)^3 - b(X-1)^2 - c(X-1) - d = X^2+1$$

$$\iff a(6X^2+2)+b.4X+2c = X^2+1$$

$$\iff \begin{cases} 6a=1 \\ 4b=0 \\ 2a+2c=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=\frac{1}{6} \\ b=0 \\ c=\frac{1}{3} \end{cases}$$

- Conclusion : Les solutions sont :

$$\boxed{\frac{1}{6}X^3+\frac{1}{3}X+d,\ d \in \mathbb{K}.}$$

Problème 1 :

1-a) Posons $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x - x$. u est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $u'(x) = \cos x - 1 \leq 0$

Donc u est décroissante. Comme $u(0)=0$, on a $u \leq 0$.

Donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \sin x \leq x.}$

b) i) φ est $\mathcal{C}^\infty$ et, soit $x \in \mathbb{R}^+$,

$\varphi'(x) = \cos x + \frac{x^2}{2}$, $\varphi''(x) = -\sin x + x \geq 0$

Donc $\boxed{\varphi \text{ est convexe.}}$

ii) Soit $x \in \mathbb{R}^+$, comme φ est convexe : $\varphi(x) \geq \varphi'(0)(x-0)+\varphi(0)$

Or $\varphi(0)=0$ et $\varphi'(0)=1$, donc $\varphi(x) \geq x$.

D'où : $\boxed{\sin x + \frac{x^3}{6} \geq x.}$

c) - Soit $x \in \mathbb{R}^+$,

$$|\sin x - x| = x - \sin x \leq \frac{x^3}{6} = \frac{|x|^3}{6}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}^{-*}$, $-x \in \mathbb{R}^+$ donc $|\sin(-x)-(-x)| \leq \frac{|-x|^3}{6}$

D'où $|-\sin x + x| \leq \frac{|x|^3}{6}$, ainsi $|\sin x - x| \leq \frac{|x|^3}{6}$

- Donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin x - x| \leq \frac{|x|^3}{6}}$

d) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\left|\frac{\sin x - x}{x^2}\right| \leq \frac{|x|}{6}$. Or $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{6} = 0$, donc, par théorème d'encadrement : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0}$

2-a) • f est clairement continue sur $\mathbb{R}^*$.

• $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ ainsi f est continue en 0.

• Donc $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

b) • $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$ donc f est bornée au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

Ainsi il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que f soit bornée sur $]-\infty, A[$ et sur $]B, +\infty[$

• f est continue sur le segment $[A, B]$ donc, d'après le théorème des bornes atteintes f est bornée sur $[A, B]$.

• Comme $\mathbb{R} =]-\infty, A[\cup [A, B] \cup]B, +\infty[$ (réunion d'un nombre fini d'intervalles),

alors $\boxed{f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}.}$

c) • f est clairement dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et, soit $x \in \mathbb{R}^*$

$$\boxed{f'(x) = \frac{\cos x . x - \sin x}{x^2}}$$

• Soit $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \frac{\sin x - x}{x^2}$.

D'après 1, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$.

Donc f est dérivable en 0 et : $\boxed{f'(0) = 0.}$

3-a) • f est continue sur $[k\pi, (k+1)\pi]$ et dérivable sur $]k\pi, (k+1)\pi[$,

• $f(k\pi) = 0 = f((k+1)\pi)$

Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c_k \in]k\pi, (k+1)\pi[$ tel que :

$$\boxed{f'(c_k) = 0}$$

b) • g est dérivable et, soit $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x$

• Soit $x \in]k\pi, (k+1)\pi[$, on a $x > 0$ et $\begin{cases} \sin x > 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ \sin x < 0 & \text{si } k \text{ impair.} \end{cases}$

Donc $\begin{cases} g'(x) > 0 & \text{si } k \text{ impair} \\ g'(x) < 0 & \text{si } k \text{ pair.} \end{cases}$

Ainsi $\boxed{\begin{array}{l} g \text{ est strictement croissante sur } [k\pi, (k+1)\pi] \text{ si } k \text{ impair} \\ \text{et strictement décroissante sur } [k\pi, (k+1)\pi] \text{ si } k \text{ pair.} \end{array}}$

c) . g est strictement monotone donc injective sur $[k\pi, (k+1)\pi]$.

Ainsi l'équation $g(x) = 0$ a au plus une solution sur $[k\pi, (k+1)\pi]$.

Donc l'équation $f'(x) = 0$ a au plus une solution sur $[k\pi, (k+1)\pi]$

. Donc : $\boxed{c_k \text{ est unique}}$

d) $\forall x \in [k\pi, (k+1)\pi]$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$, donc :

. si k impair :

x	$k\pi$		c_k		$(k+1)\pi$
g		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

. si k pair

x	$k\pi$		c_k		$(k+1)\pi$
g		$\searrow$	0	$\searrow$	
$f'(x)$		$+$		$-$	
f	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

4- . Posons $h : x \mapsto f(x) - x$.

. h est continue sur $[0,1]$.

. h est dérivable sur $]0,1[$ et, sur $x \in]0,1[$, $h'(x) = f'(x) - 1 = \dfrac{g(x)}{x^2} - 1$

De plus $g'(x) = -x\sin x < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]0,1[$

et $g(0) = 0$ donc $g < 0$ sur $]0,1[$. Ainsi $h'(x) < 0$

Donc h est strictement décroissante sur $[0,1]$

. $h(0) = 1 > 0$, $h(1) = \sin 1 - 1 < 0$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in]0,1[$ tel que $h(\alpha) = 0$ c'est-à-dire $f(\alpha) = \alpha$.

. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = x_0$. Alors $x_0 \neq 0$ donc $\dfrac{\sin x_0}{x_0} = x_0$.

Ainsi $\sin x_0 = x_0^2$ donc $|x_0^2| \leq 1$, d'où $x_0 \in [-1,1]$.

. si $x_0 < 0$, alors $x_0 \in [-1,0[\subset [-\frac{\pi}{2}, 0[$ donc $\sin x_0 < 0$ donc $\sin x_0 \neq x_0^2$

donc $f(x_0) \neq x_0$

. Ainsi $x_0 \geq 0$ et comme $f(0) \neq 0$ et $f(1) \neq 1$, $x_0 \in]0,1[$.

Donc $\boxed{\text{il existe un unique } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(\alpha) = \alpha \text{ et } \alpha \in]0,1[.}$

5-a) Posons : $h_1 : x \mapsto g(x) - \frac{x^2}{2}$ et $h_2 : x \mapsto g(x) + \frac{x^2}{2}$.

h_1 et h_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, soit $x \in \mathbb{R}$,

$h_1'(x) = g'(x) - x = -x \sin x - x = -x(\sin x + 1)$

$h_2'(x) = g'(x) + x = -x \sin x + x = x(-\sin x + 1)$

Or $\sin x + 1 \geqslant 0$ et $-\sin x + 1 \geqslant 0$, donc $h_1'(x)$ est du signe de $-x$ et $h_2'(x)$ est du signe de x.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h_1'(x)$		$+$	0	$-$	
h_1		$\nearrow$	0	$\searrow$	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h_2'(x)$		$-$	0	$+$	
h_2		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Donc $h_1 \leqslant 0$ et $h_2 \geqslant 0$, ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, \ -\frac{x^2}{2} \leqslant g(x) \leqslant \frac{x^2}{2}$

Donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad |g(x)| \leqslant \frac{x^2}{2}.}$

b) • Si $x = 0$, $|f'(x)| = 0 \leqslant \frac{1}{2}$

• Soit $x \in \mathbb{R}^*$, $|f'(x)| = \left|\frac{g(x)}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}$.

Donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}.}$

6-a) On a :

x	0		1
f	1	$\searrow$	$\sin 1$

donc $f([0,1]) = [\sin 1, 1] \subset [0,1]$.

Ainsi $[0,1]$ est stable par f. Comme $u_0 \in [0,1]$, on a :

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0,1]}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, d'après l'inégalité des accroissements finis : $|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

Ainsi $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

D'où : $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$. Comme $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$,

on a : $\boxed{\lim u_n = \alpha.}$

Problème 2.

1-a) $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et exp est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Donc $\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]0,+\infty[.}$

b) • Pour $n=0$, $\forall x \in]0,+\infty[$, $f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^{2n+2}} e^{-\frac{1}{x}}$

donc $P_0 = 1$ convient.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} e^{-\frac{1}{x}}.$$

Soit $x \in]0,+\infty[$, $f^{(n+1)}(x) = \left(\frac{P_n'(x)x^{2n+2} - P_n(x).(2n+2)x^{2n+1}}{x^{4n+4}} + \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} \cdot \frac{1}{x^2} \right) e^{-\frac{1}{x}}$

$$= \frac{P_n'(x)x^2 - 2(n+1)P_n(x)x + P_n(x)}{x^{2n+4}} e^{-\frac{1}{x}}$$

Posons $P_{n+1} = X^2 P_n' - 2(n+1)P_n X + P_n = X^2 P_n' + (1-2(n+1)X) P_n$

alors : $f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)+2}} e^{-\frac{1}{x}}$.

• D'où la conclusion par récurrence.

c) • $\boxed{P_0 = 1}$

• $P_1 = X^2 P_0' + (1-2X)P_0$ donc $\boxed{P_1 = 1-2X}$

• $P_2 = X^2 P_1' + (1-4X)P_1$ donc $P_2 = -2X^2 + (1-4X)(1-2X)$

$$\boxed{P_2 = 6X^2 - 6X + 1}$$

• $P_3 = X^2 P_2' + (1-6X)P_2 = X^2(12X-6) + (1-6X)(6X^2-6X+1)$

$$= 12X^3 - 6X^2 + 6X^2 - 6X + 1 - 36X^3 + 36X^2 - 6X$$

$$\boxed{P_3 = -24X^3 + 36X^2 - 12X + 1}$$

d) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$, le coefficient dominant de P_n est $(-1)^n(n+1)!$ et le terme constant de P_n est 1.

- Pour $n=0$, $P_0 = 1$ donc $\deg(P_0)=0$, le coefficient dominant de P_0 est $1 = (-1)^n . n!$ et le terme constant est 1.

- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons le résultat au rang n.
  - On a : $P_{n+1} = X^2 P_n' + (1 - 2(n+1)X) P_n$

    Or $\deg(X^2 P_n') = \deg P_n + 1 = n+1$

    $\deg\left((1-2(n+1)X) P_n\right) = 1 + \deg P_n = n+1$

    Donc $\deg P_{n+1} \leq n+1$.
  - Le coefficient de X^{n+1} dans P_{n+1} est : $n.(-1)^n(n+1)! - 2(n+1)(-1)^n(n+1)!$

$$= (-1)^n(n+1)!\,(n - 2(n+1))$$
$$= (-1)^n(n+1)!\,(-n-2)$$
$$= (-1)^{n+1}(n+2)! \neq 0$$

    Donc $\deg(P_{n+1}) = n+1$ et son coefficient dominant est $(-1)^{n+1}(n+2)!$
  - Le terme constant de P_{n+1} est : $P_{n+1}(0) = P_n(0) = 1$.

- Donc, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\begin{array}{c}\deg P_n = n, \text{ le coefficient dominant de } P_n \text{ est } (-1)^n(n+1)! \\ \text{et le terme constant de } P_n \text{ est } 1.\end{array}}$$

2-a) g est $\mathcal{C}^\infty$ et, soit $x \in]0,+\infty[$,

$$g'(x) = 2x f(x) + x^2 f'(x) = 2x f(x) + x^2\left(-\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x}}$$
$$= 2x f(x) - \frac{2}{x}e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = \cancel{2x f(x)} - \cancel{2x f(x)} + f(x)$$
$$= f(x).$$

Donc $g' = f$.

Ainsi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad g^{(n+1)} = (g')^{(n)} = f^{(n)}}$

b) Posons $h : x \mapsto x^2$. h est $\mathcal{C}^\infty$ et $\forall x \in]0,+\infty[$, $h^{(k)}(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } k=0 \\ 2x & \text{si } k=1 \\ 2 & \text{si } k=2 \\ 0 & \text{si } k\geq 3 \end{cases}$ 8

D'après la formule de Leibniz ; soit $x \in]0,+\infty[$,

$$g^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} h^{(k)}(x) f^{(n+1-k)}(x)$$

$$= x^2 f^{(n+1)}(x) + (n+1).2x f^{(n)}(x) + \frac{n(n+1)}{2}.2 f^{(n-1)}(x)$$

Donc $f^{(n)}(x) = x^2 f^{(n+1)}(x) + 2(n+1)x f^{(n)}(x) + n(n+1) f^{(n-1)}(x)$

Ainsi $x^2 f^{(n+1)}(x) = (1-2(n+1)x) f^{(n)}(x) - n(n+1) f^{(n-1)}(x)$

D'où : $\dfrac{P_{n+1}(x)}{x^{2n+2}} = \dfrac{(1-2(n+1)x)P_n(x)}{x^{2n+2}} - \dfrac{n(n+1)P_{n-1}(x)}{x^{2n}}$

Donc $P_{n+1}(x) = (1-2(n+1)x)P_n(x) - x^2 n(n+1) P_{n-1}(x)$

Ainsi $\boxed{P_{n+1} = (1-2(n+1)X)P_n - n(n+1)X^2 P_{n-1}}$

3-a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, d'après 4.b et 5.b,

$$X^2 P_n' + (1-\cancel{2(n+1)X})P_n = (1-\cancel{2(n+1)X})P_n - n(n+1)X^2 P_{n-1}$$

Donc $X^2 P_n' = -n(n+1)X^2 P_{n-1}$.

Ainsi $\boxed{P_n' = -n(n+1)P_{n-1}}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, en dérivant 4.b,

$$P_{n+1}' = 2XP_n' + X^2 P_n'' - 2(n+1)P_n + (1-2(n+1)X)P_n'$$

Or, d'après 6.a, $P_{n+1}' = -(n+1)(n+2)P_n$ donc :

$$-(n+1)(n+2)P_n = (1-2nX)P_n' + X^2P_n'' - 2(n+1)P_n$$

Donc : $\boxed{X^2P_n'' + (1-2nX)P_n' + n(n+1)P_n = 0}$