

Exercice 1:

1) f est dérivable sur $]a, b[$, $x \mapsto \frac{1}{x-b}$ est dérivable sur $]a, b[$ et exp est dérivable sur \mathbb{R}

donc h est dérivable sur $]a, b[$.

• Soit $x \in]a, b[$,

$$h'(x) = f'(x) e^{\frac{1}{x-b}} + (f(x) - f(a)) \cdot \left(-\frac{1}{(x-b)^2}\right) e^{\frac{1}{x-b}}$$

Donc:

$$h'(x) = \left(f'(x) - \frac{f(x) - f(a)}{(x-b)^2} \right) e^{\frac{1}{x-b}}$$

2) $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{1}{x-b} = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow b^-} e^{\frac{1}{x-b}} = 0$.

Comme f est continue en b , $\lim_{x \rightarrow b^-} (f(x) - f(a)) = f(b) - f(a)$.

Ainsi $\lim_{x \rightarrow b^-} h(x) = 0$.

Donc h est prolongeable par continuité en posant $h(b) = 0$.

• h est clairement continue sur $]a, b[$ donc h est continue sur $[a, b]$.

• h est dérivable sur $]a, b[$.

• $h(a) = 0 = h(b)$

• Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$

C'est-à-dire:

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{(c-b)^2}$$

Exercice 2:

• Analyse: Supposons qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X+1) - P(X-1) = X^2 + 1$.

• Comme on n'a pas solution, $P \neq 0$. Posons $P = \sum_{k=0}^m a_k X^k$ avec $m = \deg P$.

• On a: $\deg(P(X+1) - P(X-1)) \leq \deg P = m$.

Le coefficient de X^m dans $P(X+1) - P(X-1)$ est: $a_m - a_m = 0$

Donc $\deg(P(X+1) - P(X-1)) \leq m-1$.

• Si $m=0$, alors P est constant et $P(X+1) - P(X-1) = 0$ donc $m \neq 0$

• Le coefficient de X^{m-1} dans $P(X+1) - P(X-1)$ est: $ma_m + a_{m-1} - (-ma_m + a_{m-1}) = 2ma_m \neq 0$

Donc $\deg(P(X+1) - P(X-1)) = n-1$.

• Annon $\deg(X^2+1) = n-1$ donc $2 = n-1$, d'où $n=3$.

• Synthèse: Posons $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$.

$P(X+1) - P(X-1) = X^2+1 \Leftrightarrow a(X+1)^3 + b(X+1)^2 + c(X+1) + d - a(X-1)^3 - b(X-1)^2 - c(X-1) - d = X^2+1$

$\Leftrightarrow a(6X^2+2) + b \cdot 4X + 2c = X^2+1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a = 1 \\ 4b = 0 \\ 2a + 2c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = 0 \\ c = \frac{1}{3} \end{cases}$

• Conclusion: les solutions sont:

$\frac{1}{6}X^3 + \frac{1}{3}X + d, d \in \mathbb{K}$.

Problème 1:

1-a) Posons $\mu: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sin x - x$

μ est dérivable sur \mathbb{R}^+ et: $\forall x \in \mathbb{R}^+, \mu'(x) = \cos x - 1 \leq 0$

Donc μ est décroissante. Comme $\mu(0) = 0$, on a $\mu \leq 0$.

Donc: $\forall x \in \mathbb{R}^+, \sin x \leq x$.

b) i) φ est \mathcal{C}^∞ et, sur $x \in \mathbb{R}^+$,

$\varphi'(x) = \cos x + \frac{x^2}{2}$, $\varphi''(x) = -\sin x + x \geq 0$

Donc φ est convexe.

ii) Soit $x \in \mathbb{R}^+$, comme φ est convexe: $\varphi(x) \geq \varphi'(0)(x-0) + \varphi(0)$

Or $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 1$, donc $\varphi(x) \geq x$.

D'où: $\sin x + \frac{x^3}{6} \geq x$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}^+$,

$|\sin x - x| = x - \sin x \leq \frac{x^3}{6} = \frac{|x|^3}{6}$

• Soit $x \in \mathbb{R}^-$, $-x \in \mathbb{R}^+$ donc $|\sin(-x) - (-x)| \leq \frac{|-x|^3}{6}$

D'où $|\sin x + x| \leq \frac{|x|^3}{6}$, ainsi $|\sin x - x| \leq \frac{|x|^3}{6}$

• Donc: $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x - x| \leq \frac{|x|^3}{6}$

d) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\left| \frac{\sin x - x}{x^2} \right| \leq \frac{|x|}{6}$ - Or $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{6} = 0$, donc, par théorème (3)

d'encadrement:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0}$$

2-a). f est clairement continue sur \mathbb{R}^* .

• $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ ainsi f est continue en 0.

• Donc $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

b). $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ donc f est bornée au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

Ainsi il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que f est bornée sur $] -\infty, A[$ et sur $] B, +\infty [$.

• f est continue sur le segment $[A, B]$ donc, d'après le théorème des bornes atteintes f est bornée sur $[A, B]$.

• Comme $\mathbb{R} =] -\infty, A[\cup [A, B] \cup] B, +\infty [$ (réunion d'un nombre fini d'intervalles),

alors $\boxed{f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}}$.

c). f est clairement dérivable sur \mathbb{R}^* et, sur $x \in \mathbb{R}^*$

$$\boxed{f'(x) = \frac{\cos x \cdot x - \sin x}{x^2}}$$

• Sur $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \frac{\sin x - x}{x^2}$.

D'après 1, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$.

Donc f est dérivable en 0 et: $\boxed{f'(0) = 0}$.

3-a). f est continue sur $[k\pi, (k+1)\pi]$ et dérivable sur $]k\pi, (k+1)\pi[$.

• $f(k\pi) = 0 = f((k+1)\pi)$

Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c_k \in]k\pi, (k+1)\pi[$ tel que:

$$\boxed{f'(c_k) = 0}$$

b). g est dérivable et, sur $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x$

• Sur $x \in]k\pi, (k+1)\pi[$, on a $x > 0$ et $\left. \begin{array}{l} \sin x > 0 \text{ si } k \text{ pair} \\ \sin x < 0 \text{ si } k \text{ impair} \end{array} \right\}$

Donc $\left\{ \begin{array}{l} g'(x) > 0 \text{ si } k \text{ impair} \\ g'(x) < 0 \text{ si } k \text{ pair} \end{array} \right.$

Ainsi g est strictement croissante sur $[k\pi, (k+1)\pi]$ si k impair et strictement décroissante sur $[k\pi, (k+1)\pi]$ si k pair.

(4)

c) g est strictement monotone donc injective sur $[k\pi, (k+1)\pi]$.

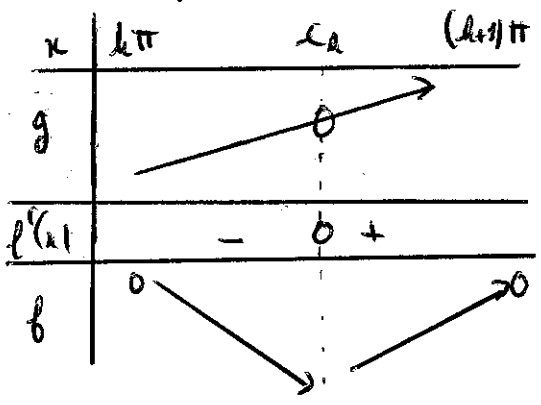
Ainsi l'équation $g(x) = 0$ a au plus une solution sur $[k\pi, (k+1)\pi]$.

Donc l'équation $f'(x) = 0$ a au plus une solution sur $[k\pi, (k+1)\pi]$.

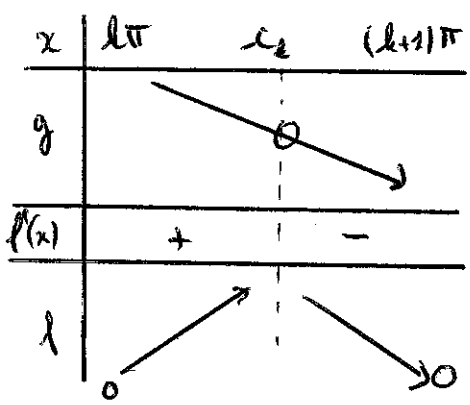
• Donc: $-C_2$ est unique

d) $\forall x \in [k\pi, (k+1)\pi], f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, donc:

• si k impair:



• si k pair:



4- • Posons $h: x \mapsto f(x) - x$.

• h est continue sur $[0, 1]$.

• h est dérivable sur $]0, 1[$ et, sur $x \in]0, 1[, h'(x) = f'(x) - 1 = \frac{g(x)}{x^2} - 1$

De plus $g'(x) = -x \sin x < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]0, 1[$

et $g(0) = 0$ donc $g < 0$ sur $]0, 1[$. Ainsi $h'(x) < 0$

Donc h est strictement décroissante sur $[0, 1]$

• $h(0) = 1 > 0, h(1) = \sin 1 - 1 < 0$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique

$\alpha \in]0, 1[$ tel que $h(\alpha) = 0$ c'est-à-dire $f(\alpha) = \alpha$.

• Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = x_0$. Mais $x_0 \neq 0$ donc $\frac{\sin x_0}{x_0} = x_0$.

Ainsi $\sin x_0 = x_0^2$ donc $|x_0^2| \leq 1$, d'où $x_0 \in [-1, 1]$.

• si $x_0 < 0$, alors $x_0 \in]-\frac{1}{2}, 0[\subset]-\frac{\pi}{2}, 0[$ donc $\sin x_0 < 0$ donc $\sin x_0 \neq x_0^2$

donc $f(x_0) \neq x_0$

• Ainsi $x_0 \geq 0$ et comme $f(0) \neq 0$ et $f(1) \neq 1, x_0 \in]0, 1[$.

Donc il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = \alpha$ et $\alpha \in]0, 1[$.

5-a) Posons : $h_1 : x \mapsto g(x) - \frac{x^2}{2}$ et $h_2 : x \mapsto g(x) + \frac{x^2}{2}$.

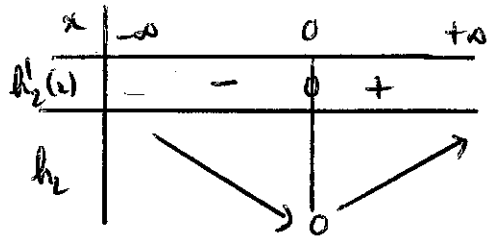
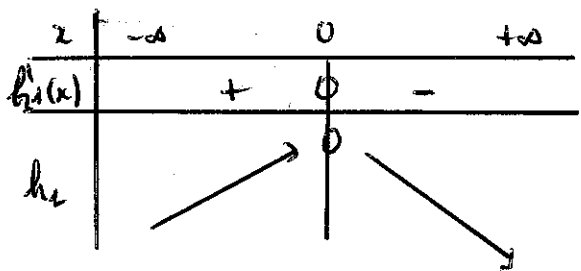
h_1 et h_2 sont dérivables sur \mathbb{R} et, sur $x \in \mathbb{R}$,

$$h_1'(x) = g'(x) - x = -x \sin x - x = -x(\sin x + 1)$$

$$h_2'(x) = g'(x) + x = -x \sin x + x = x(\sin x + 1)$$

Or $\sin x + 1 > 0$ et $-\sin x + 1 > 0$, donc $h_1'(x)$ est du signe de $-x$

et $h_2'(x)$ est du signe de x .



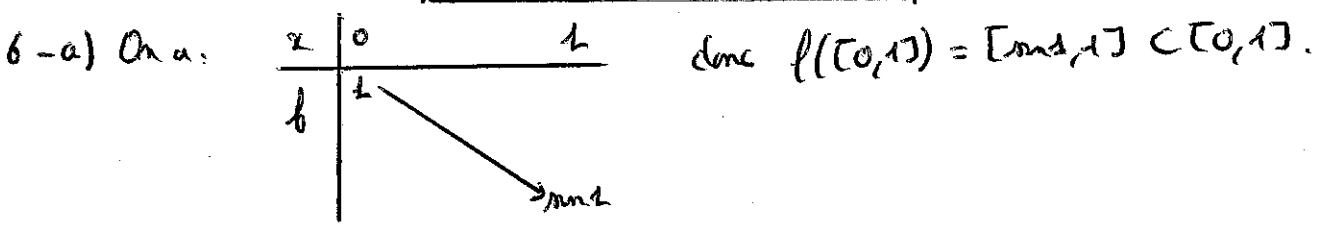
Donc $h_1 \leq 0$ et $h_2 \geq 0$, ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, -\frac{x^2}{2} \leq g(x) \leq \frac{x^2}{2}$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, |g(x)| \leq \frac{x^2}{2}$.

b) Si $x=0$, $|f'(x)| = 0 \leq \frac{1}{2}$

• Sur $x \in \mathbb{R}^*$, $|f'(x)| = \left| \frac{g(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{2}$.

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.



ainsi $[0, 1]$ est stable par f . Comme $u_0 \in [0, 1]$, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$

b) Sur $n \in \mathbb{N}$, f est dérivable sur \mathbb{R} donc, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

Ainsi $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$.

D'où : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$. Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$,

on a : $\lim u_n = \alpha$.

Problème 2:

1-a) $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$ et expr est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

Donc f est \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$.

b) • Par $m=0$, $\forall x \in]0, +\infty[$, $f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = x^{\frac{1}{2m+2}} e^{-\frac{1}{x}}$

donc $P_0 = 1$ convient.

• Soit $m \in \mathbb{N}$, supposons qu'il existe $P_m \in \mathbb{R}[X]$ tel que:

$$\forall x \in]0, +\infty[, f^{(m)}(x) = \frac{P_m(x)}{x^{2m+2}} e^{-\frac{1}{x}}.$$

$$\text{Soit } x \in]0, +\infty[, f^{(m+1)}(x) = \left(\frac{P_m'(x) x^{2m+2} - P_m(x) \cdot (2m+2) x^{2m+1}}{x^{4m+4}} + \frac{P_m(x)}{x^{2m+2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \right) e^{-\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{P_m'(x) x^2 - 2(m+1) P_m(x) x + P_m(x)}{x^{2m+4}} e^{-\frac{1}{x}}$$

$$\text{Posons } P_{m+1} = X^2 P_m' - 2(m+1) P_m X + P_m = X^2 P_m' + (1 - 2(m+1)X) P_m$$

$$\text{alors: } f^{(m+1)}(x) = \frac{P_{m+1}(x)}{x^{2(m+1)+2}} e^{-\frac{1}{x}}.$$

• D'où la conclusion par récurrence.

c) • $P_0 = 1$

• $P_1 = X^2 P_0' + (1 - 2X) P_0$ donc $P_1 = 1 - 2X$

• $P_2 = X^2 P_1' + (1 - 4X) P_1$ donc $P_2 = -2X^2 + (1 - 4X)(1 - 2X)$

$$P_2 = 6X^2 - 6X + 1$$

• $P_3 = X^2 P_2' + (1 - 6X) P_2 = X^2 (12X - 6) + (1 - 6X)(6X^2 - 6X + 1)$

$$= 12X^3 - 6X^2 + 6X^2 - 6X + 1 - 36X^3 + 36X^2 - 6X$$

$$P_3 = -24X^3 + 36X^2 - 12X + 1$$

d) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$, le coefficient dominant de P_n est $(-1)^n (n+1)!$ et le terme constant de P_n est 1.

• Pour $n = 0$, $P_0 = 1$ donc $\deg(P_0) = 0$, le coefficient dominant de P_0 est $1 = (-1)^0 \cdot 1!$ et le terme constant est 1.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons le résultat au rang n .

• On a: $P_{n+1} = X^2 P_n' + (1 - 2(n+1)X) P_n$

Or $\deg(X^2 P_n') = \deg P_n + 1 = n+1$

$\deg((1 - 2(n+1)X) P_n) = 1 + \deg P_n = n+1$

Donc $\deg P_{n+1} \leq n+1$.

• le coefficient de X^{n+1} dans P_{n+1} est :

$$\begin{aligned} & n \cdot (-1)^n (n+1)! - 2(n+1) (-1)^n (n+1)! \\ &= (-1)^n (n+1)! (n - 2(n+1)) \\ &= (-1)^n (n+1)! (-n-2) \\ &= (-1)^{n+1} (n+2)! \neq 0 \end{aligned}$$

Donc $\deg(P_{n+1}) = n+1$ et son coefficient dominant est $(-1)^{n+1} (n+2)!$

• le terme constant de P_{n+1} est : $P_{n+1}(0) = P_n(0) = 1$.

• Donc, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$\deg P_n = n$, le coefficient dominant de P_n est $(-1)^n (n+1)!$
et le terme constant de P_n est 1.

2-a) g est \mathcal{C}^∞ et, sur $x \in]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x f(x) + x^2 f'(x) = 2x f(x) + x^2 \left(-\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right) e^{-\frac{1}{x}} \\ &= 2x f(x) - \frac{2}{x} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = 2x f(x) - 2x f(x) + f(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Donc $g' = f$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, g^{(n+1)} = (g')^{(n)} = f^{(n)}$

b) Posons $h: x \mapsto x^2$. h est C^∞ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $h^{(k)}(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } k=0 \\ 2x & \text{si } k=1 \\ 2 & \text{si } k=2 \\ 0 & \text{si } k \geq 3 \end{cases}$ (8)

D'après la formule de Leibniz, sur $x \in]0, +\infty[$,

$$g^{(m+2)}(x) = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} h^{(k)}(x) f^{(m+1-k)}(x)$$

$$= x^2 f^{(m+2)}(x) + (m+1) \cdot 2x f^{(m+1)}(x) + \frac{m(m+1)}{2} \cdot 2 f^{(m)}(x)$$

Donc $f^{(m)}(x) = x^2 f^{(m+2)}(x) + 2(m+1)x f^{(m+1)}(x) + m(m+1) f^{(m)}(x)$

Ainsi $x^2 f^{(m+2)}(x) = (1 - 2(m+1)x) f^{(m)}(x) - m(m+1) f^{(m)}(x)$

D'où: $\frac{P_{m+2}(x)}{x^{2m+2}} = \frac{(1 - 2(m+1)x) P_m(x)}{x^{2m+2}} - \frac{m(m+1) P_m(x)}{x^{2m}}$

Donc $P_{m+2}(x) = (1 - 2(m+1)x) P_m(x) - x^2 m(m+1) P_m(x)$

Ainsi $\boxed{P_{m+2} = (1 - 2(m+1)x) P_m - m(m+1)x^2 P_m}$

3-a) Soit $m \in \mathbb{N}^*$, d'après 6.1 et 5.1,

$$x^2 P_m' + (1 - 2(m+1)x) P_m = (1 - 2(m+1)x) P_m - m(m+1)x^2 P_{m-1}$$

Donc $x^2 P_m' = -m(m+1)x^2 P_{m-1}$.

Ainsi $\boxed{P_m' = -m(m+1) P_{m-1}}$

b) Soit $m \in \mathbb{N}$, en dérivant 6.1,

$$P_{m+1}' = 2x P_m' + x^2 P_m'' - 2(m+1) P_m + (1 - 2(m+1)x) P_m'$$

Or, d'après 6.a, $P_{m+1}' = -(m+1)(m+2) P_m$ donc :

$$-(m+1)(m+2) P_m = (1 - 2mx) P_m' + x^2 P_m'' - 2(m+1) P_m$$

Donc: $\boxed{x^2 P_m'' + (1 - 2mx) P_m' + m(m+1) P_m = 0}$