CORRECTION DS 7

Exercice 1 :

1- $f(x) \underset{0}{=} e^{1+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\frac{x^3}{6}+o(x^3)}$

$\underset{0}{=} e \cdot e^{\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3+o(x^3)}$

$\underset{0}{=} e\left(1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3\right)^3+o(x^3)\right)$

$\underset{0}{=} e\left(1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{27}x^3\right)+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{27}x^3+o(x^3)\right)$

Donc $\boxed{f(x) \underset{0}{=} e\left(1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{18}x^2+\frac{5}{162}x^3+o(x^3)\right)}$

2- $g(x) \underset{0}{=} \dfrac{2x-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}+o(x^3)}{2x-\frac{(2x)^3}{6}+o(x^3)}$

$\underset{0}{=} \dfrac{1-x+\frac{4}{3}x^2+o(x^2)}{1-\frac{2}{3}x^2+o(x^2)}$

$\underset{0}{=} \left(1-x+\frac{4}{3}x^2\right)\left(1+\frac{2}{3}x^2\right)+o(x^2)$

$\underset{0}{=} 1+\frac{2}{3}x^2-x+\frac{4}{3}x^2+o(x^2)$

Donc $\boxed{g(x) \underset{0}{=} 1-x+2x^2+o(x^2)}$

3- $e^x-\cos x \underset{0}{=} 1+x-1+o(x)$

$\underset{0}{=} x+o(x)$

$\underset{0}{\sim} x$

$\sin(x)-\ln(1+x) \underset{0}{=} x-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)+o(x^2)$

$\underset{0}{=} \frac{x^2}{2}+o(x^2)$

$\underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$

Donc $\dfrac{e^x-\cos x}{\sin x-\ln(1+x)} \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{\frac{x^2}{2}} = \dfrac{2}{x}$

Ainsi $\boxed{\lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^x-\cos x}{\sin x-\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0^+}\dfrac{2}{x} = +\infty.}$

Exercice 2 :

1- $I_2 \neq O_2$ donc (I_2) est une base de F.

Ainsi $\boxed{\dim F = 1}$

2- $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E,\ d = -a \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix},\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

$= \mathrm{Vect}(M_1, M_2, M_3)$ où $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$,

$\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$

Donc (M_1, M_2, M_3) est libre.

Ainsi (M_1, M_2, M_3) est une base de G et $\boxed{\dim G = 3}$

3- • Soit $M \in F \cap G$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \lambda I_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

et $\lambda + \lambda = 0$ donc $\lambda = 0$ et $M = 0_E$.

D'où $F \cap G = \{0_E\}$.

• $\dim F + \dim G = 4 = \dim E$.

Donc $\boxed{E = F \oplus G.}$

Problème 1 :

Partie 1 :

1-a) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$

$$\begin{cases} Q' = P \\ \int_0^1 Q(x)\,dx = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R},\ Q = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{X^{k+1}}{k+1} + \lambda \\ \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} \left[\frac{x^{k+2}}{k+2} \right]_0^1 + \lambda = 0 \end{cases} \iff Q = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{X^{k+1}}{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(k+1)(k+2)}$$

Donc : $\boxed{\exists!\, Q \in \mathbb{R}[X],\ Q' = P \text{ et } \int_0^1 Q(x)\,dx = 0}$

b) . Pour $n=0$, $B_0 = 1$ donc B_0 existe et est unique.

. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons B_n construit. Alors d'après 1. B_{n+1} est l'unique polynôme tel que $B_{n+1}' = (n+1)B_n$ et $\int_0^1 B_{n+1}(x)\,dx = 0$

. Donc par récurrence : $\boxed{\text{la suite } (B_n) \text{ est définie et est unique.}}$

2-a) . $\boxed{B_0 = 1}$

. $B_1' = B_0 = 1$ donc $B_1 = X + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$0 = \int_0^1 B_1(x)\,dx = \frac{1}{2} + \lambda$ donc $\lambda = -\frac{1}{2}$ et $\boxed{B_1 = X - \frac{1}{2}}$

. $B_2' = 2B_1 = 2X - 1$ donc $B_2 = X^2 - X + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$0 = \int_0^1 B_2(x)\,dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \lambda$ donc $\lambda = \frac{1}{6}$ et $\boxed{B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}}$

. $B_3' = 3B_2 = 3X^2 - 3X + \frac{1}{2}$ donc $B_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$0 = \int_0^1 B_3(x)\,dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \lambda$ donc $\lambda = 0$ et $\boxed{B_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X}$

b) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, c_n le coefficient dominant de B_n.

Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg B_n = n$ et $c_n = 1$.

. Pour $n = 0$, $\deg B_0 = 0$ et $c_0 = 1$.

. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\deg B_n = n$ et $c_n = 1$.

On a : $B_{n+1}' = (n+1)B_n$ donc $\deg B_{n+1}' = \deg(B_n) = n$.

Ainsi $\deg B_{n+1} = n+1$.

De plus $B_n = X^n + R_n$ avec $\deg R_n < n$

Donc $B_{n+1}' = (n+1)X^n + (n+1)R_n$ ainsi $B_{n+1} = X^{n+1} + Q_n$ avec $\deg Q_n < n+1$

D'où $c_{n+1} = 1$.

. Ainsi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \deg B_n = n \text{ et } c_n = 1.}$

c) $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\deg(B_k) = k$.

Donc $\boxed{(B_k)_{k\in[\![0,n]\!]} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]}$.

3-a) Avec les valeurs de 2.a :

$\boxed{b_0 = 1 \ , \ b_1 = -\frac{1}{2} \ , \ b_2 = \frac{1}{6} \text{ et } b_3 = 0}$

b) . Pour $n=0$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k = b_0 = 1 = B_0$

. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$.

On a : $B_{n+1}' = (n+1) B_n = (n+1) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$ et $B_{n+1}(0) = b_{n+1}$

donc : $B_{n+1} = (n+1) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} \frac{X^{k+1}}{k+1} + b_{n+1}$.

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!} b_{n-k} X^{k+1} + b_{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} b_{n-k} X^{k+1} + b_{n+1}$$

$$\underset{j=k+1}{=} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} b_{n+1-j} X^j + b_{n+1}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} b_{n+1-j} X^j.$$

. Donc, par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k.}$

c) i) . $C_0 = (-1)^0 B_0(1-X)$ donc $\boxed{C_0 = 1}$

. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $C_n' = -(-1)^n B_n'(1-X) = (-1)^{n+1} n B_{n-1}(1-X)$

$$= n(-1)^{n-1} B_{n-1}(1-X)$$

Donc $\boxed{C_n' = n C_{n-1}}$.

. $\int_0^1 C_n(x)\,dx = (-1)^n \int_0^1 B_n(1-x)\,dx$.

On effectue le changement de variable $t = 1-x$, on a : $dt = -dx$

$$\int_0^1 C_n(x)dx = (-1)^n \int_1^0 -B_n(t)\,dt = (-1)^n \int_0^1 B_n(t)\,dt = 0$$

Donc $\boxed{\int_0^1 C_n(x)\,dx = 0.}$

$\forall n \in \mathbb{N},\quad B_n \quad \dots$

Donc : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X).}$

iii) Soit $p\in\mathbb{N}$, on a $B_{2p+1}(X) = (-1)^{2p+1} B_{2p+1}(1-X) = -B_{2p+1}(1-X)$

En évaluant en $\frac{1}{2}$, $\quad B_{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right) = -B_{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right)$

Donc : $\boxed{B_{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0}$

4-a) • Pour $n=0$, $\quad 2^{n-1}\left(B_n\left(\frac{X}{2}\right) + B_n\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}(1+1) = 1 = B_n.$

• Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $B_n(X) = 2^{n-1}\left(B_n\left(\frac{X}{2}\right) + B_n\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)$

$$B_{n+1}'(X) = (n+1)\cdot 2^{n-1}\left(B_n\left(\frac{X}{2}\right) + B_n\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)$$

$$= 2^{n-1}\left(B_{n+1}'\left(\frac{X}{2}\right) + B_{n+1}'\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)$$

Donc, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que :

$$B_{n+1}(X) = 2^{n-1}\left(2B_{n+1}\left(\frac{X}{2}\right) + 2B_{n+1}\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) + \lambda$$

$$= 2^n\left(B_{n+1}\left(\frac{X}{2}\right) + B_{n+1}\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) + \lambda$$

De plus : $\quad 0 = \int_0^1 B_{n+1}(x)\,dx = 2^n\int_0^1\left(B_{n+1}\left(\frac{x}{2}\right) + B_{n+1}\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)dx \quad + \lambda$

Or, les changements de variables $t = \frac{x}{2}$ et $s = \frac{x+1}{2}$ donnent $dt = \frac{1}{2}dx$ et $ds = \frac{1}{2}dx$

donc $\quad \lambda = -2^n\left(2\int_0^{\frac{1}{2}} B_{n+1}(t)\,dt + 2\int_{\frac{1}{2}}^1 B_{n+1}(s)\,ds\right)$

$$= -2^{n+1}\int_0^1 B_{n+1}(x)\,dx = 0$$

Donc $\quad B_{n+1}(X) = 2^n\left(B_{n+1}\left(\frac{X}{2}\right) + B_{n+1}\left(\frac{X+1}{2}\right)\right).$

• Ainsi, par récurrence :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad B_n(X) = 2^{n-1}\left(B_n\left(\frac{X}{2}\right) + B_n\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)}$$

b) • Soit $p\in\mathbb{N}^*$, $\quad B_{2p+1}(0) = 2^{2p}\left(B_{2p+1}(0) + \cancel{B_{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right)}\right)$

donc $\quad b_{2p+1} = 2^{2p}\, b_{2p+1}$

Or $2^{2p}\neq 1$ donc $\quad \boxed{b_{2p+1} = 0}$

• Soit $n \geqslant 2$, $\quad B_n(1) = (-1)^n B_n(1-1) = (-1)^n b_n$

• si n est pair : $B_n(1) = b_n$

• si n est impair : $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}^*$

$$B_n(1) = (-1)^n b_{2p+1} = 0 = b_n$$

Dans tous les cas : $\boxed{B_n(1) = b_n}$.

5-a) Soit $n \geqslant 2$, on a $B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$

Donc $B_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k}$, ainsi $b_n = b_n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k}$

D'où : $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} = 0}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $\sum_{k=1}^{n+2} \binom{n+2}{k} b_{n+2-k} = 0$

Donc $\binom{n+2}{1} b_{n+1} + \sum_{k=2}^{n+2} \binom{n+2}{k} b_{n+2-k} = 0$

Ainsi $b_{n+1} = -\frac{1}{n+2} \sum_{k=2}^{n+2} \binom{n+2}{k} b_{n+2-k}$

$$\underset{j=n+2-k}{=} -\frac{1}{n+2} \sum_{j=0}^{n} \binom{n+2}{n+2-j} b_j$$

D'où : $\boxed{b_{n+1} = -\frac{1}{n+2} \sum_{j=0}^{n} \binom{n+2}{j} b_j}$

c) $b_4 = -\frac{1}{5}\left(b_0 + 5b_1 + 10b_2 + 10b_3\right) = -\frac{1}{5}\left(1 - \frac{5}{2} + \frac{10}{6} + 0\right)$

Donc $\boxed{b_4 = -\frac{1}{30}}$

<u>Partie 2 :</u>

6-a) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ donc $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$

Ainsi $\boxed{f \text{ est continue en } 0}$.

b) $\frac{x}{e^x - 1} \underset{0}{=} \frac{x}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)}$

$$\underset{0}{=} \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)}$$

$$\frac{x}{e^x-1} \underset{0}{=} 1 - \left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}\right) + \left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}\right)^3 + o(x^3)$$ 7

$$\underset{0}{=} 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{24} + \frac{x^2}{4} + 2\cdot\frac{x}{2}\frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{8} + o(x^3)$$

Donc $\boxed{f(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^3)}$

c) i) On a : $e^x - 1 \underset{0}{=} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k!} + o(x^{n+1})$

Donc : $\frac{e^x-1}{x} \underset{0}{=} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^{k-1}}{k!} + o(x^n)$

D'où $\boxed{\frac{e^x-1}{x} \underset{0}{=} \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{(j+1)!} + o(x^n)}$

ii) $\frac{e^x-1}{x} \underset{0}{=} 1 + h(x)$ où $h(x) \underset{0}{=} \sum_{j=1}^{n} \frac{x^j}{j+1} + o(x^n)$

Donc $h \in DL_n(0)$ et $\lim_0 h = 0$.

De plus $f(x) = \frac{1}{1+h(x)}$ donc, comme $x \mapsto \frac{1}{1+x} \in DL_n(0)$, par composition : $\boxed{f \in DL_n(0)}$.

d) $x = f(x)(e^x-1) \underset{0}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} x^k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) + o(x^n)$

Or : $\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} X^k \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{X^k}{k!} = \sum_{k=0}^{2n} c_k X^k$

avec : $\forall k \in [\![0, 2n]\!]$, $c_k = \sum_{j=0}^{k} b_j \frac{a_{k-j}}{(k-j)!}$ où $b_j = \begin{cases} \frac{1}{j!} & \text{si } j \in [\![1, n]\!] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

En particulier : $c_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!} \frac{a_{n-j}}{(n-j)!} = \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} a_{n-j}$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k}.$$

De plus $x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + o(x^n)$

Donc, par unicité du développement limité, si $n \neq 1$, $c_n = 0$

donc $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k} = 0}$

7- a) g est un quotient de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

Donc $\boxed{g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}).}$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = \frac{2e^{2x}(e^{2x}+1) - (e^{2x}-1).2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

$$= \frac{(e^{2x}+1)^2 - (e^{2x}-1)^2}{(e^{2x}+1)^2}$$

Donc $\boxed{g'(x) = 1 - g(x)^2.}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $x \in \mathbb{R}$,

$$g^{(n+1)}(x) = (g')^{(n)}(x) = -(g^2)^{(n)}(x).$$

$\boxed{g^{(n+1)}(x) = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)}$ d'après la formule de Leibniz.

d) $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, donc d'après la formule de Taylor-Young : $\boxed{g \in DL_n(0)}$

e) D'après la formule de Taylor-Young : $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = \dfrac{g^{(n)}(0)}{n!}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1)c_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)!} g^{(n+1)}(0)$$

$$= -\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} g^{(k)}(0) g^{(n-k)}(0)$$

$$= -\sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \frac{g^{(n-k)}(0)}{(n-k)!}$$

Donc $\boxed{(n+1)c_{n+1} = -\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}.}$

8-a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$,

$$h(4x) - h(2x) = f(4x) - f(2x) + 2x - x$$

$$= \frac{4x}{e^{4x}-1} - \frac{2x}{e^{2x}-1} + x$$

$$= \frac{4x - 2x(e^{2x}+1) + x(e^{4x}-1)}{e^{4x}-1} = \frac{x(1-2e^{2x}+e^{4x})}{e^{4x}-1}$$

$$h(4x)-h(2x) = \frac{x\,(e^{2x}-1)^2}{(e^{2x}-1)(e^{2x}+1)} = \frac{x\,(e^{2x}-1)}{e^{2x}+1} = x\,g(x).$$

Pour $x=0$, $h(4x)-h(2x) = 0 = x\,g(x)$.

Donc : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ h(4x)-h(2x) = x\,g(x).}$

b) $$\begin{aligned} x\,g(x) &= f(4x)+f(2x)+x \\ &\underset{0}{=} \sum_{k=0}^{2n+1}\frac{a_k}{k!}(4x)^k - \sum_{k=0}^{2n+1}\frac{a_k}{k!}(2x)^k + x + o(x^{2n+1}) \\ &\underset{0}{=} \cancel{a_0} + 4a_1x + \sum_{k=2}^{2n+1}\frac{a_k}{k!}(4x)^k - \Big(\cancel{a_0} + 2a_1x + \sum_{k=2}^{2n+1}\frac{a_k}{k!}(2x)^k\Big) \\ &\quad + x + o(x^{2n+1}) \end{aligned}$$

Or, d'après 6.c, $a_1 = -\frac{1}{2}$, donc :

$$x\,g(x) \underset{0}{=} \sum_{k=2}^{2n}\frac{a_k}{k!}(4^k-2^k)\,x^k + o(x^{2n+1})$$

Donc $$g(x) \underset{0}{=} \sum_{k=2}^{2n}\frac{a_k}{k!}(4^k-2^k)\,x^{k-1} + o(x^{2n})$$

Or $g(-x) = \dfrac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1} = \dfrac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}} = -g(x)$ donc g est impaire.

Ainsi, si $k-1$ est pair, $\dfrac{a_k}{k!}(4^k-2^k) = 0$.

Donc $$g(x) \underset{0}{=} \sum_{k=1}^{n}\frac{a_{2k}}{(2k)!}\left(4^{2k}-2^{2k}\right)x^{2k-1} + o(x^{2n})$$

D'où : $$\boxed{g(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(2k)!}\,4^k(4^k-1)\,x^{2k-1} + o(x^{2n})}$$

Partie 3 :

9 - . D'après 5.b, $b_0 = 1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ b_{n+1} = -\dfrac{1}{n+2}\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{n+2}{j} b_j$

. D'après 6.d) $a_0 = 1$ et, soit $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2}\binom{n+2}{k} a_{n+2-k} = 0$

Donc $\displaystyle\binom{n+2}{1}a_{n+1} + \sum_{k=2}^{n+2}\binom{n+2}{k}a_{n+2-k} = 0$

Ainsi $\displaystyle a_{n+1} = -\frac{1}{n+2}\sum_{j=0}^{n}\binom{n+2}{j}a_j$ (de même qu'en 5-b)

Donc, par récurrence forte : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ a_n = b_n.}$

10-a) $\tan \in \mathcal{C}^\infty(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$ donc, d'après la formule de Taylor-Young :

$$\boxed{\tan \in DL_n(0).}$$

b) On a : $\tan' = 1 + \tan^2$.

Donc, d'après la formule de Leibniz : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\tan^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-k)}$

Ainsi, de même qu'en 7.e :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1) d_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} d_k d_{n-k}.}$$

c) • Pour $n = 1$, $d_{2n-1} = d_1 = 1$ $\qquad c_{n-1} = c_1 = 1$

donc $d_{2n-1} = (-1)^{n-1} c_{n-1}$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $d_{2k-1} = (-1)^{k-1} c_{2k-1}$.

Comme g et $\tan$ sont impaires : $\forall k \in \mathbb{N}$, $d_{2k} = 0 = c_{2k}$ et :

$$\begin{aligned}
(2n+1) d_{2n+1} &= \sum_{k=0}^{2n} d_k d_{2n-k} \\
&= \sum_{j=0}^{n} d_{2j} d_{2n-2j} + \sum_{j=1}^{n} d_{2j-1} d_{2n-(2j-1)} \\
&= 0 + \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j-1} c_{2j-1} \cdot (-1)^{n-j} c_{2n-(2j-1)} \\
&= (-1)^{n-1} \sum_{j=0}^{n} c_{2j-1} c_{2n-(2j-1)} \\
&= (-1)^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n} c_{2j-1} c_{2n-(2j-1)} + \sum_{j=0}^{n} c_{2j} c_{2n-2j} \right) \\
&= (-1)^{n-1} \sum_{l=0}^{2n} c_{2k} c_{2n-2l} \\
&= -(-1)^{n-1} (2n+1) c_{2n+1} \quad \text{d'après 7-e}
\end{aligned}$$

Donc $d_{2n+1} = (-1)^n c_{2n+1}$.

• Ainsi, par récurrence forte : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ d_{2n-1} = (-1)^{n-1} c_{2n-1}.}$

11- Comme tan est impaire :

$$\tan(x) \underset{0}{=} \sum_{l=1}^{n} d_{2l-1}\, x^{2l-1} + o(x^{2n})$$

$$\underset{0}{=} \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l-1} c_{2l-1}\, x^{2l-1} + o(x^{2n})$$

$$\underset{0}{=} \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l-1} \frac{a_{2l}}{(2l)!} 4^{l}(4^{l}-1)\, x^{2l-1} + o(x^{2n})$$

Donc :

$$\boxed{\tan(x) \underset{0}{=} \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l-1} \frac{b_{2l}}{(2l)!} 4^{l}(4^{l}-1)\, x^{2l-1} + o(x^{n})}$$