

Problème 1 : Autour du théorème de Césaro

1. (a) • Pour $n=2$, $x_2 = \frac{2}{3}$ donc $0 < x_2 < 1$.
 • Soit $n \geq 2$, supposons que $0 < x_n < 1$. Alors :

$$x_{n+1} = \frac{x_n(1+x_n)}{1+2x_n} > 0.$$

et :

$$x_{n+1} - 1 = \frac{x_n(1+x_n) - (1+2x_n)}{1+2x_n} = \frac{x_n^2 - x_n - 1}{1+2x_n}.$$

Or le discriminant associé à $x^2 - x - 1 = 0$ est $\Delta = 5$ et ses racines sont $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Or : $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 < x_n < 1 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ donc : $x_n^2 - x_n - 1 > 0$, ainsi $x_{n+1} - 1 > 0$.

Donc : $0 < x_{n+1} < 1$.

- On a donc prouvé par récurrence que :

$$\forall n \geq 2, 0 < x_n < 1.$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n(1+x_n) - x_n(1+2x_n)}{1+2x_n} = \frac{-x_n^2}{1+2x_n} \leq 0.$$

Donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

- (c) • La suite (x_n) est décroissante et minorée par 0 donc (x_n) converge vers $l \in [0, 1]$.
 • Par passage à la limite, on a donc : $l = \frac{l(1+l)}{1+2l}$. Or :

$$l = \frac{l(1+l)}{1+2l} \Leftrightarrow l = 0 \text{ ou } 1 = \frac{1+l}{1+2l} \Leftrightarrow l = 0 \text{ ou } 1+2l = 1+l \Leftrightarrow l = 0.$$

Donc (x_n) converge vers 0.

- (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{1+2x_n}{x_n(1+x_n)} - \frac{1}{x_n} = \frac{1+2x_n - (1+x_n)}{x_n(1+x_n)} = \frac{1}{x_n+1}.$$

- (e) Comme $\lim x_n = 0$, on a : $\lim \frac{1}{x_{n+1}} = 1$.

Ainsi $\lim u_n = 1$.

- (f) • Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k} \right).$$

Donc, par sommes télescopiques :

$$v_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_1} \right).$$

- Comme $\lim u_n = 1$, par théorème de Césaro, $\lim v_n = 1$.

Or, soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $v_n = \frac{1}{nx_{n+1}} - \frac{1}{n}$.

Donc : $\frac{1}{nx_{n+1}} = v_n + \frac{1}{n}$, ainsi : $\lim \frac{1}{nx_{n+1}} = 1$ donc $\lim nx_{n+1} = 1$.

Or $\lim x_{n+1} = 0$, d'où $\lim (n+1)x_{n+1} = 1$.

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = 1.$$

2. (a) Posons $l = \lim x_n$, alors $\lim (x_{n+1} - x_n) = l - l = 0$.

Donc la suite $(x_{n+1} - x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

- (b) i. Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = x_{n+1} - x_n$.

Alors, comme $\lim u_n = l$, on a, d'après le théorème de Césaro : $\lim v_n = l$.

Or, soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_{k+1} - x_k) = \frac{1}{n} (x_{n+1} - x_1),$$

par somme télescopique.

Ainsi : $\lim \frac{1}{n} (x_{n+1} - x_1) = l$.

Or $\lim \frac{x_1}{n} = 0$, d'où $\lim \frac{x_{n+1}}{n} = l$.

De plus, $\lim \frac{n}{n+1} = 1$ donc, par produit : $\lim \frac{x_{n+1}}{n+1} = l$.

Donc :

$$\lim \frac{x_n}{n} = l.$$

- ii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $x_n = \frac{x_n}{n} \cdot n$.
Or $\lim \frac{x_n}{n} = l \neq 0$ et $\lim n = +\infty$ donc :

$$\lim x_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } l > 0 \\ -\infty & \text{si } l < 0. \end{cases}$$

- iii. Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \ln n$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_{n+1} - x_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Donc $\lim(x_{n+1} - x_n) = 0$ et (x_n) diverge.

Ainsi, dans le cas où $l = 0$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas nécessairement convergente.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k = \frac{1}{n} \frac{-1 + (-1)^{n+1}}{1 - (-1)} = \frac{-1 + (-1)^{n+1}}{2n}.$$

Ainsi, comme $(-1 + (-1)^{n+1})$ est bornée et $\lim \frac{1}{2n} = 0$, on a :

$$\lim v_n = 0.$$

(b) On a (v_n) qui converge et (u_n) qui n'a pas de limite. Ainsi la réciproque du théorème de Césaro est fausse.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comme (u_n) est croissante, on a :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geq \sum_{k=n+1}^{2n} u_{n+1} = (2n - (n+1) + 1) u_{n+1} = n u_{n+1}.$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} u_k = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{2n} u_k - \sum_{k=1}^n u_k \right) = \frac{1}{n} (2n v_{2n} - n v_n) = 2v_{2n} - v_n.$$

- (c)
 - (v_n) est convergente donc bornée, ainsi $(2v_{2n} - v_n)$ est bornée. Donc (u_n) est majorée.
 - (u_n) est croissante et majorée donc (u_n) converge.
 - Posons $l = \lim u_n$, alors, d'après le théorème de Césaro, $\lim v_n = l$ donc :

$$\lim u_n = \lim v_n.$$

- (d) On a montré que si (u_n) est croissante, alors la réciproque du théorème de Césaro est vraie.