PCSI 1 — 2024/2025

Devoir à la maison n^{o} 1 :

A rendre pour le : lundi 16 septembre

Les résultats doivent être encadrés.

Si vous ne souhaitez pas être noté, merci de le préciser sur votre copie.

Exercice 1 :

On considère la propriété P suivante :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, (ab \leq a) \Rightarrow (a \leq 0 \text{ ou } b \geq 1).$$

1. (a) Ecrire la contraposée de P.
   (b) La contraposée de P est-elle vraie ?
   (c) P est-elle vraie ?
2. Ecrire la négation de P.
3. La propriété suivante :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, (a \leq 0 \text{ ou } b \geq 1) \Rightarrow (ab \leq a)$$

   est-elle vraie ?

Problème 1 :

1. On considère la fonction g définie par :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 - 3x - 4. \end{array}$$

   (a) Etudier les variations de g et ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (b) Montrer que :

$$\exists! \alpha \in \mathbb{R}, g(\alpha) = 0.$$

   Dans toute la suite du problème, on considère $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $g(\alpha) = 0$.
   (c) En déduire le signe de g.
   (d) Montrer que :

$$2 \leq \alpha \leq 3.$$

2. On considère la fonction f définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}. \end{array}$$

   (a) Montrer que f est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.
   (b) En déduire le tableau de variations de f.
   (c) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   (d) Calculer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de $x \mapsto f(x) - x - 2$. Quelle conséquence graphique peut-on en tirer ?
   (e) Déterminer le signe de $x \mapsto f(x) - x - 2$. Quelle conséquence graphique peut-on en tirer ?
   (f) Tracer, sur un même graphique, la courbe représentative de f ainsi que la droite d'équation $y = x + 2$.

Problème 2 :

Le but de ce problème est de déterminer toutes les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n+1) > f \circ f(n). \qquad (1)$$

On note $Id_{\mathbb{N}}$ la fonction : $Id_{\mathbb{N}} \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n. \end{array}$.

1. Montrer que $f = Id_{\mathbb{N}}$ vérifie la relation (1)
2. Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant la relation (1).
   (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, k \geq n \Longrightarrow f(k) \geq n.$$

   (b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \geq n.$$

   (c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n+1) > f(n).$$

   (d) En déduire que $f = Id_{\mathbb{N}}$.
3. Conclure.