A rendre pour le : lundi 7 avril

Les résultats doivent être encadrés.

Si vous ne souhaitez pas être noté, merci de le préciser sur votre copie.

Problème 1 :

On se propose d'étudier quelques propriétés de la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+t}\,dt.$$

On ne cherchera pas à calculer l'intégrale définissant $f(x)$;

1. Rappeler la définition d'une fonction numérique décroissante sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
   En déduire que f est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Soit x_0 un réel strictement positif quelconque.
   (a) Montrer que :
   $$\forall x \in \left[\frac{x_0}{2}, +\infty\right[,\ |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2e|x-x_0|}{x_0^2}.$$
   (b) En déduire que f est continue au point x_0.
3. Montrer que pour tout réel x strictement positif :
   $$\frac{e-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{e-1}{x}.$$
   En déduire :
   $$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e-1}{x}.$$
4. (a) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, déterminer un réel positif M tel que :
   $$\forall t \in [0,1],\ |e^t - 1| \leq Mt.$$
   (b) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par la relation :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ g(x) = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{x+t}\,dt.$$
   Montrer que g est bornée sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   (c) Montrer finalement :
   $$f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -\ln(x).$$
5. Dans cette question, on se propose de déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de $f(1)$.
   On introduit la fonction h définie sur $[0,1]$ par la relation : $\forall t \in [0,1],\ h(t) = \frac{e^t}{1+t}$.
   On définit également deux suites $(u_n)_{n\geq1}$ et $(v_n)_{n\geq1}$ en posant :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right) \text{ et } v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k+1}{n}\right).$$
   (a) Vérifier que la fonction h est croissante sur le segment $[0,1]$.
   (b) Donner une interprétation géométrique des réels u_n et v_n.
   (c) Montrer que :
   $$\forall k \in \{0,1,2,\dots,n-1\},\ \frac{1}{n}h\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} h(t)\,dt \leq \frac{1}{n}h\left(\frac{k+1}{n}\right).$$
   (d) Déduire de ce qui précède que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\left|f(1) - \frac{u_n+v_n}{2}\right| \leq \frac{h(1)-h(0)}{2n}.$$