Devoir à la maison n° 2 :

A rendre pour le : lundi 7 octobre

Les résultats doivent être encadrés.

Si vous ne souhaitez pas être noté, merci de le préciser sur votre copie.

Exercice 1 :

Soit $n \geq 2$.

1. Montrer que :
$$\text{pgcd}\,(2^{8n} - 3^{2n} + 13, 2^{4n} - 3^n) = \text{pgcd}\,(2^{4n} - 3^n, 13).$$
2. Montrer que 13 divise $2^{4n} - 3^n$.
3. En déduire la valeur de :
$$\text{pgcd}\,(2^{8n} - 3^{2n} + 13, 2^{4n} - 3^n).$$

Exercice 2 :

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \cos((n+2)\theta) = 2\cos((n+1)\theta)\cos(\theta) - \cos(n\theta).$$
2. Montrer que :
$$\cos(\theta) \in \mathbb{Q} \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \cos(n\theta) \in \mathbb{Q}.$$
3. En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 3 :

On considère la fonction :
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \text{sh}^2(x) - \text{ch}\,(x) - 1. \end{array}$$

1. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = 0$.
2. Etudier les variations et les limites de la fonction f.

Problème 1 :

Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = \text{Arccos}\,\frac{1-x}{1+x} + \text{Arcsin}\,\frac{2\sqrt{x}}{1+x}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
   On cherche à résoudre par deux méthodes indépendantes, l'équation $f(x) = \pi$.
2. Première méthode.
   (a) Déterminer D' tel que la fonction f soit dérivable sur D' dérivable et calculer f'.
   (b) Déterminer les variations de f et tracer f.
   (c) Résoudre l'équation $f(x) = \pi$.
3. Deuxième méthode.
   (a) Montrer que l'application φ suivante est bijective :
$$\varphi: \begin{array}{ccc} [0,\pi[& \to & \mathbb{R}^+ \\ u & \mapsto & \tan^2 \frac{u}{2}. \end{array}$$
   (b) Résoudre à nouveau l'équation $f(x) = \pi$ en posant $x = \varphi(u)$.