Devoir à la maison n° 3 :

A rendre pour le : lundi 4 novembre

Les résultats doivent être encadrés.

Si vous ne souhaitez pas être noté, merci de le préciser sur votre copie.

Problème 1 :

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\, H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

La suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est appelée : série harmonique.

L'objectif de ce problème est de montrer que, si $n \geq 2$, alors H_n n'est pas un entier.

1. Montrer que $H_1 \in \mathbb{N}$, $H_2 \notin \mathbb{N}$ et $H_3 \notin \mathbb{N}$.
2. Soit $n \geq 2$ un entier pair. On suppose qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que :
$$H_n = \frac{2p+1}{2q}.$$
   Montrer qu'il existe $p', q' \in \mathbb{N}$ tels que :
$$H_{n+1} = \frac{2p'+1}{2q'}.$$
3. Soit $n \geq 2$ un entier impair. Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2m+1$.
   (a) Montrer que :
$$H_{n+1} = \frac{1}{2} H_{m+1} + \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2k+1}.$$
   (b) Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tels que :
$$\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2k+1} = \frac{a}{2b+1}.$$
4. Montrer que :
$$\forall n \geq 2,\, \exists p, q \in \mathbb{N},\, H_n = \frac{2p+1}{2q}.$$
5. Conclure.

T.S.V.P.

Problème 2 :
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose :

$$\forall z \in \mathbb{C},\, P(z) = z^n - e^{2ina}.$$

1. Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:
$$P(z) = 0.$$
On note $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ les n solutions de l'équation $P(z) = 0$ (que l'on a déterminées) et on admet que :
$$\forall z \in \mathbb{C},\, P(z) = \prod_{k=0}^{n-1} (z - z_k).$$

2. On pose : $Z = 1 - e^{2ina}$.
   (a) Factoriser et simplifier Z.
   (b) En remarquant que $Z = P(1)$, déterminer une deuxième factorisation de Z.
   (c) En déduire que :
$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + a\right) = \frac{\sin(na)}{2^{n-1}}.$$

3. On suppose que $a \in \{k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\}$. Calculer :
$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + a\right).$$

4. On suppose que $a \notin \{k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\}$.
   (a) Montrer que :
$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + a\right) = \frac{\sin(na)}{2^{n-1}\sin(a)}.$$
   (b) En déduire la valeur de :
$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$
   On pourra faire tendre a vers 0 et utiliser $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$.

5. (a) Montrer que :
$$\prod_{k=n+1}^{2n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right).$$
   (b) En déduire :
$$\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}.$$