Devoir à la maison n° 4 :

A rendre pour le : lundi 18 novembre

Les résultats doivent être encadrés.

Si vous ne souhaitez pas être noté, merci de le préciser sur votre copie.

Problème 1 :

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx.$$

1. (a) Calculer I_0 et I_1.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, exprimer $I_n + I_{n+2}$ en fonction de n.
   (c) En déduire I_2 et I_3.
2. (a) Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (b) Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.
3. On pose :
$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ u_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$
   (a) Montrer que :
$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ u_p + 2(-1)^p I_{2p+1} = \ln(2).$$
   (b) En déduire la limite de la suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$.
4. On pose :
$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ v_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}.$$
   (a) Montrer que :
$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ v_p + (-1)^p I_{2p} = \frac{\pi}{4}.$$
   (b) En déduire la limite de la suite $(v_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$.
5. Au moyen d'une intégration par parties, déterminer la limite de la suite $(pI_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$.

Problème 2 :

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n}.$$

1. Calculer F_0 et F_1.
2. On cherche à calculer F_2.
   (a) Première méthode : calculer F_2 en effectuant le changement de variable $u = \operatorname{Arctan} t$. On donnera une expression ne faisant apparaître ni cos, ni sin.
   (b) Deuxième méthode : en utilisant une intégration par parties, exprimer F_1 en fonction de F_1 et F_2. En déduire F_2.
3. (a) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n(F_n(x) - F_{n+1}(x)).$$
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, exprimer F_{n+1} en fonction de F_n.
4. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \frac{(2n-2)!}{2^{2(n-1)}((n-1)!)^2}\left(F_1(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{2k-1}(k!)^2}{(2k)!k}\frac{x}{(1+x^2)^k}\right).$$
5. (a) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \int_0^{\operatorname{Arctan} x} \cos^{2(n-1)}(t)\,dt.$$
   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de :
$$\int_0^{\pi/4} \cos^{2n}(t)\,dt$$
   sous forme de somme que l'on ne cherchera pas à simplifier.