PCSI 1 — 2024/2025

Devoir à la maison n° 5 :

A rendre pour le : lundi 9 décembre

Les résultats doivent être encadrés.

Si vous ne souhaitez pas être noté, merci de le préciser sur votre copie.

Problème 1 :

Dans ce problème, on pose $E = \mathcal{C}^\infty([0,\pi/2],\mathbb{R})$ et on considère sur $[0,\pi/2]$ l'équation différentielle $y''+y=f$ où f est donnée dans E.

L'objectif est de déterminer les solutions y vérifiant les deux conditions aux limites $y(0)=y(\pi/2)=0$.

A cet effet, on introduit l'application T associant à toute fonction f de E la fonction $F=T(f)$ définie sur $[0,\pi/2]$ par :

$$F(x) = -\cos(x)\int_0^x f(t)\sin(t)\,dt - \sin(x)\int_x^{\pi/2} f(t)\cos(t)\,dt.$$

1. On étudie quelques propriétés de l'équation homogène $y''+y=0$ sur $[0,\pi/2]$.
   (a) Préciser l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y''+y=0$.
   (b) Préciser celles qui vérifient les conditions aux limites $y(0)=y(\pi/2)=0$.
2. On étudie la fonction $F=T(f)$ lorsque f est la fonction définie par $f(x)=1$.
   (a) Calculer $F(x)$ (sans symbole intégral), puis $F''(x)+F(x)$.
   (b) Déterminer toutes les solutions y de l'équation $y''+y=1$ telle que $y(0)=y(\pi/2)=0$.
3. On étudie la fonction $F=T(f)$ lorsque f est la fonction définie par $f(x)=x$.
   (a) Calculer $F(x)$ (sans symbole intégral), puis $F''(x)+F(x)$.
   (b) Déterminer toutes les solutions y de l'équation $y''+y=x$ telle que $y(0)=y(\pi/2)=0$.
4. On étudie la fonction $F=T(f)$ lorsque f est une fonction quelconque de E.
   (a) Montrer que F est deux fois dérivable, puis expliciter $F''(x)+F(x)$.
   (b) Déterminer toutes les solutions y de l'équation $y''+y=f$ telle que $y(0)=y(\pi/2)=0$.
5. On étudie l'application $T: E\to E$, qui associe à toute fonction f de E la fonction $F=T(f)$.
   (a) Montrer que T est injectif.
   (b) Etudier la surjectivité de T.
6. On considère $\lambda\in\mathbb{R}$ et on suppose qu'il existe une fonction $f\in E$ telle que $f\neq 0$ et $T(f)=\lambda f$.
   (a) Montrer que λ est non nul et que f vérifie les relations (R) :
   $$\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}],\ f''(x)+(1-\frac{1}{\lambda})f(x)=0,\ f(0)=0,\ f(\pi/2)=0.$$
   (b) On suppose $\lambda=1$. Déterminer les fonctions vérifiant (R).
   (c) On suppose $1-\frac{1}{\lambda}=-\omega^2$ (avec $\omega>0$). Déterminer les fonctions vérifiant (R).
   (d) On suppose $1-\frac{1}{\lambda}=\omega^2>0$ (avec $\omega>0$).
   Montrer, s'il existe une fonction non nulle $f\in E$ vérifiant (R), que $\omega=2n$ avec $n\in\mathbb{N}^*$.
   En déduire que λ est nécessairement de la forme suivante :
   $$\lambda_n = \frac{-1}{4n^2-1} \text{ où } n\in\mathbb{N}^*.$$

Problème 2 :

Soit E un ensemble, soient A et B des parties de E. On considère l'application suivante :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & (X\cap A)\cup B. \end{array}$$

1. (a) Simplifier la fonction f dans le cas où $A=\emptyset$.
   (b) Simplifier la fonction f dans le cas où $B=E$.
2. Calculer $f(\emptyset)$, $f(A)$, $f(B)$ et $f(E)$.
3. (a) Montrer que :
   $$(A\cup B)\cap A = A \text{ et } (A\cap B)\cup B = B.$$
   (b) Montrer que $f\circ f=f$.
4. (a) Soit F un ensemble, soit $g\in\mathcal{F}(F,F)$ telle que $g\circ g=g$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   (i) g est injective,
   (ii) g est surjective,
   (iii) g est la fonction identité de F.
   (b) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit bijective.