Devoir à la maison n° 7 :

A rendre pour le : lundi 3 février

Les résultats doivent être encadrés.

Si vous ne souhaitez pas être noté, merci de le préciser sur votre copie.

Problème 1 :

Questions préliminaires :

1. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$. Montrer que si $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$, alors :
$$b^2 - 4ac \leq 0.$$

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$. On pose :
$$A = \frac{2}{(b-a)^2}\left(f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)\right),$$
et :
$$g: \begin{array}{ccl} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \frac{(b-x)^2}{2}A. \end{array}$$
   (a) Montrer que $g \in \mathcal{C}^1([a,b])$ et que $g(a) = g(b)$.
   (b) En déduire qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :
$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(c).$$
   Ce résultat est appelé formule de Taylor-Lagrange.
   On admettra que cette formule reste vraie si $b \leq a$.

Résultat général :

Soit f une fonction positive, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que f'' soit bornée sur $\mathbb{R}$.

3. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction f, montrer que :
$$\forall x, \lambda \in \mathbb{R},\ f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2}\sup_{t\in\mathbb{R}}|f''(t)| \geq 0.$$

4. (a) Si $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|f''(t)| = 0$, montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leq \sqrt{2f(x).\sup_{t\in\mathbb{R}}|f''(t)|}.$$
   (b) Si $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|f''(t)| \neq 0$, en remarquant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \mapsto f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2}\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|f''(t)|$ est une fonction polynomiale du second degré , montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leq \sqrt{2f(x).\sup_{t\in\mathbb{R}}|f''(t)|}.$$

Application :

On pose $g = \sqrt{f}$.

5. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en tout point x où $f(x) \neq 0$.
6. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.
   (a) Déduire de 4. que $f'(x_0) = 0$.
   (b) Montrer que $f''(x_0) \geq 0$.
   (c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, il existe c compris entre x_0 et x tel que :
$$f(x) = \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(c).$$
   En déduire que si $f''(x_0) > 0$ alors g n'est pas dérivable en x_0.

7. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, soit $r > 0$. On pose : $I_r = [x_0 - r, x_0 + r]$ et $I_{2r} = [x_0 - 2r, x_0 + 2r]$. On suppose que $\sup\limits_{t \in I_{2r}} |f''(t)| \neq 0$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall x \in I_r, |f'(x)| \leq r \sup_{t \in I_{2r}} |f''(t)|.$$
   (b) Soit $x \in I_r$, montrer que si $2f(x) \sup\limits_{t \in I_{2r}} |f''(t)| < f'(x)^2$, alors le trinôme en λ :
   $$\tau(\lambda) = f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2} \sup_{t \in I_{2r}} |f''(t)|,$$
   admet deux racines distinctes λ_1 et λ_2 telles que $\mu = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$ appartienne à l'intervalle $[-r, r]$ et que :
   $$f(x + \mu) \leq \tau(\mu) < 0.$$
   En déduire que, pour tout $x \in I_r$,
   $$|f'(x)| \leq \sqrt{2f(x). \sup_{t \in I_{2r}} |f''(t)|}.$$
8. Déduire des questions précédentes que, si f est une fonction positive de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que f'' s'annule en tous les zéros de f (s'il en existe), alors $g = \sqrt{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Problème 2 :
On pose :
$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}.$$
Dans ce problème, on confondra un polynôme et la fonction polynomiale qui lui est associée et on admettra que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

1. (a) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n' = S_{n-1}.$$
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que le polynôme S_n n'a pas de racine réelle si n est pair et a une unique racine réelle si n est impair. (On pourra faire une démonstration par récurrence.)

   On pose :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{X^k}{k!}.$$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note α_n l'unique racine réelle de P_n.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que α_n est racine simple de P_n.
   (b) i. Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^{2k}}{(2k)!} \left(1 + \frac{X}{2k+1}\right).$$
   ii. En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, -(2n+1) \leq \alpha_n \leq -1.$$
   (c) i. Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(\alpha_n) = \frac{\alpha_n^{2n+2}}{(2n+2)!} \left(1 + \frac{\alpha_n}{2n+3}\right).$$
   ii. En déduire que la suite (α_n) est décroissante.
   (d) On suppose, dans cette question, que la suite (α_n) est convergente de limite $l \in \mathbb{R}$.
   i. Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, |P_n(\alpha_n) - P_n(l)| \leq e^{-l}(\alpha_n - l).$$
   ii. En déduire que :
   $$\lim_{n \to +\infty} P_n(\alpha_n) = e^l.$$
   iii. Aboutir à une contradiction.
   (e) En déduire la nature et la limite de la suite (α_n).