# Devoir à la maison n° 8 :



**A rendre pour le : lundi 3 mars**

**Les résultats doivent être encadrés.**

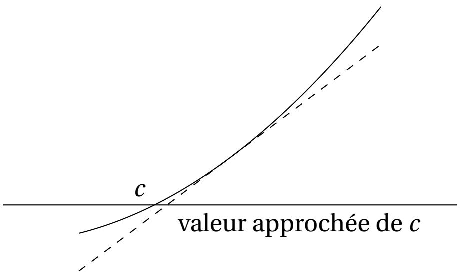
**Si vous ne souhaitez pas être noté, merci de le préciser sur votre copie.**

**Problème 1 : Méthode de Newton**

Principe de la méthode

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction dérivable sur $I$ telle que $f'$ ne s'annule pas. On suppose que $f$ admet un zéro noté $c$ que l'on cherche à approcher.

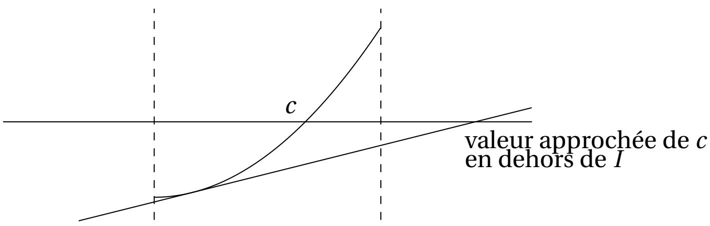
La méthode de Newton consiste à approcher la courbe représentative de $f$ par sa tangente :




On va donc considérer le point d'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses.

Ce point est bien défini car on suppose que $f'$ ne s'annule pas donc qu'il n'existe pas de tangente horizontale.

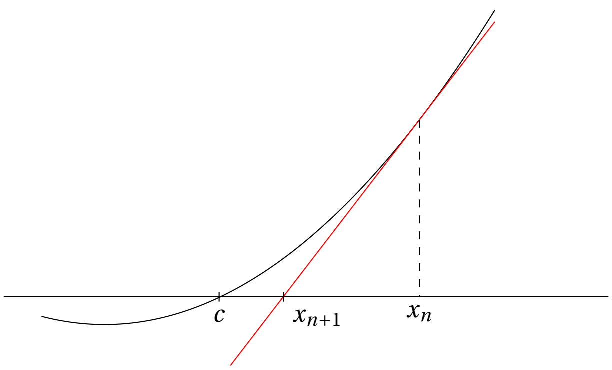
Le principe d'approcher la courbe par sa tangente n'est pas toujours possible car si $f$ est définie sur un intervalle $I$, la valeur obtenue peut ne pas appartenir à $I$. Par exemple :




Il faut donc avoir des hypothèses qui assurent la bonne définition.

Définition d'une suite

Ainsi, le principe de la méthode de Newton est de construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, si $x_n$ est construit, $x_{n+1}$ est l'abscisse de l'intersection de l'axe des abscisses avec la tangente à $f$ au point $x_n$.




L'équation de la tangente en $x_n$ est :

$$y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n).$$

Ainsi, comme $x_{n+1}$ est l'abscisse de l'intersection de l'axe des abscisses avec la tangente à $f$ au point $x_n$, on a :

$$0 = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n),$$

c'est à dire :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

On va donc étudier la suite définie par :

$$\boxed{\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}}$$

Convergence de la méthode

On suppose que :

$$\boxed{\begin{array}{c} f \in \mathcal{C}^2([a,b]) \\ f(a)f(b) < 0 \\ f' \text{ ne s'annule pas sur} [a,b]. \end{array}}$$

- Comme $f'$ est continue sur $[a,b]$ et ne s'annule pas sur $[a,b]$ alors $f'$ est de signe constant sur [a,b]. Quitte à changer de signe, on supposera :

$$\boxed{f' > 0.}$$

- Ainsi $f$ est continue et strictement croissante sur $[a,b]$ et comme $f(a)f(b) < 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\boxed{f \text{ admet un unique zéro noté } c \text{ dans } [a,b].}$$

  On suppose également que :

$$\boxed{\begin{array}{c} f \text{ est convexe,} \\ x_0 \in [a,b] \text{ et } f(x_0) > 0. \end{array}}$$

1. Montrer que la suite $(x_n)$ est bien définie et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in [c,b].$$

2. Montrer que $(x_n)$ converge vers $c$.

3. Posons :

$$g : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{array}$$

   (a) Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que :

$$\forall x \in [c,b], \forall t \in [c,x], |g'(t)| \leq K|x-c|.$$

   (b) En déduire que :

$$\forall x \in [c,b], |g(x) - c| \leq K|x-c|^2,$$

   puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_{n+1} - c| \leq K|x_n - c|^2.$$

4. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - c| \leq \frac{1}{K}(K(b-a))^{2^n}.$$

5. Conclure.

**Problème 2 : Polynômes d'interpolation de Lagrange**

1. Dans cette partie, on se fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on se donne $a_1, \dots, a_n$ des réels **deux à deux distincts**.
   On définit pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ :
   $$L_i = \frac{\displaystyle\prod_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} (X - a_j)}{\displaystyle\prod_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} (a_i - a_j)}.$$
   Les polynômes $L_1, \dots, L_n$ sont appelés les **polynômes d'interpolation de Lagrange** aux points $x_1, \dots, x_n$.
   Si $i$ et $k \in \mathbb{N}$, le symbole de Kronecker est noté $\delta_{i,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$
   (a) Soit $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer le degré de $L_i$.
   (b) Montrer que :
   $$\forall i, k \in [\![1, n]\!],\ L_i(a_k) = \delta_{i,k}$$
   (c) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, monter qu'il existe un unique $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $P = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i$.
   Déterminer la valeur de $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.
   (d) Déduire des questions précédentes que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $Q(a_k) = x_k$.
   (e) On pose $\Phi = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X - a_k)$.
      i. Montrer que :
      $$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \Phi'(a_i) \neq 0.$$
      ii. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit $Q$ le polynôme défini à la question 1.d.
      Montrer que :
      $$Q(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\displaystyle\prod_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} (X - a_j)}{\Phi'(a_i)}.$$
2. Si $f$ est une fonction continue de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$, justifier l'existence de $\displaystyle\max_{t \in [-1,1]} |f(t)|$.

3. Pour une fonction continue $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, on notera $||f||_\infty = \displaystyle\max_{t \in [-1,1]} |f(t)|$.

   Dans cette partie, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on se donne $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$.

   On se donne $a_1, \dots, a_n$ des éléments de $[-1, 1]$ deux à deux distincts.
   On note $P$ l'unique polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que :
   $$\forall i \in [\![1, n]\!],\ P(a_i) = f(a_i)$$
   *(on a prouvé l'existence et l'unicité dans la partie précédente).*
   On note $\Phi = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X - a_i)$.
   (a) Soit $\varphi : x \mapsto f(x) - P(x) - \lambda\Phi(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dans cette question, on **fixe** $t \in [-1, 1] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$.
      i. Montrer qu'il est possible de choisir $\lambda$ tel que $\varphi(t) = 0$. On fixe ainsi $\lambda$ dans la suite de cette question.
      ii. Montrer que $\varphi$ s'annule $n+1$ fois au moins sur $[-1, 1]$. En déduire que $\varphi'$ s'annule au moins $n$ fois sur $[-1, 1]$.
      iii. En déduire que $\varphi^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $[-1, 1]$. On note $a$ un réel de $[-1, 1]$ où $\varphi^{(n)}$ s'annule.
      iv. En déduire que $f(t) - P(t) = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}\Phi(t)$.
   (b) Déduire de la question précédente que pour tout $t \in [-1, 1]$, $|f(t) - P(t)| \leq \dfrac{M_n}{n!}|\Phi(t)|$, où $M_n = \|f^{(n)}\|_\infty$.