PCSI 1 — 2024/2025

Devoir à la maison n° 9 :

A rendre pour le : lundi 17 mars

Les résultats doivent être encadrés.

Si vous ne souhaitez pas être noté, merci de le préciser sur votre copie.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n)$ une famille de n réels deux à deux distincts.
Pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, on note L_i le polynôme de degré $n-1$ défini par :

$$L_i(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

On dit que $L_1, \dots, L_n$ sont les polynômes de Lagrange associés à $a_1, \dots, a_n$.

1. **Polynômes de Lagrange**

   (a) Montrer que, pour tout i et k dans $[\![1, n]\!]$,

   $$L_i(a_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   (b) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$: $P = \sum_{i=1}^{n} P(a_i) L_i$.

   (c) Montrer que, pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-2$,

   $$\sum_{i=1}^{n} \frac{P(a_i)}{\displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (a_i - a_j)} = 0.$$

2. **Polynômes de Tchebychev**

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

   $$T_n(X) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} X^{n-2p} (1 - X^2)^p.$$

   (a) En développant $(1+x)^n$ pour deux réels x bien choisis, montrer que

   $$\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} = 2^{n-1}.$$

   (b) Montrer que T_n est un polynôme de degré n. Expliciter le coefficient dominant de T_n.

   (c) Montrer que T_n est l'unique polynôme à coefficients réels vérifiant la relation

   $$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

   On pourra utiliser la formule de Moivre.

   (d) Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $x_k = \cos\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$. Montrer que

   $$T_n(X) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)$$

3. **Une première inégalité**

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et W un polynôme unitaire (c'est-à-dire de coefficient dominant 1) de degré n. L'objectif de cette question est de montrer que

   $$\sup_{x \in [-1,1]} |W(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}} \tag{1}$$

   puis d'étudier dans quel cas il y a égalité.

   (a) Montrer que $\sup\limits_{x \in [-1,1]} |T_n(x)| = 1$. En déduire un polynôme unitaire de degré n réalisant le cas d'égalité dans (1).

   On pose $Q = \dfrac{1}{2^{n-1}} T_n - W$ et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $z_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$.

(b) Montrer que Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$.

(c) Dans cette question, on montre (1) par l'absurde. On suppose donc que $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |W(x)| < \dfrac{1}{2^{n-1}}$

i. Montrer que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $Q(z_k) > 0$ si k est pair et $Q(z_k) < 0$ si k est impair.
ii. Montrer que, pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, il existe $c_k \in]z_{k+1}, z_k[$ tel que $Q(c_k) = 0$.
iii. En déduire une contradiction et conclure.

(d) On suppose maintenant que $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |W(x)| = \dfrac{1}{2^{n-1}}$

i. Montrer que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\frac{Q(z_k)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} (z_k - z_j)} \geq 0.$$

ii. En déduire que $Q = 0$, puis que $W = \dfrac{1}{2^{n-1}} T_n$.
On pourra considérer la somme des inégalités de la question précédente et exploiter la question 1.(c) appliquée à des données convenables.

4. **Une deuxième inégalité**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall x \in [-1,1],\ \sqrt{1-x^2}|P(x)| \leq 1.$$

L'objectif de cette question est de montrer que :

$$\forall x \in [-1,1],\ |P(x)| \leq n.$$

Soient $L_1, \ldots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés à $\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n}$ (définis en 2.(d)).

(a) On pose, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $Q_k = \prod\limits_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{k\}} (X - x_j)$.

i. Montrer que : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $T_n'(x_k) = 2^{n-1} Q_k(x_k)$.
ii. Montrer que :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ L_k(X) = \frac{T_n(X)}{T_n'(x_k)(X - x_k)}.$$

iii. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, montrer que :

$$T_n'(\cos(\theta)) = \frac{n \sin(n\theta)}{\sin(\theta)}.$$

En déduire que :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ T_n'(x_k) = \frac{n(-1)^{k+1}}{\sqrt{1-x_k^2}}.$$

(b) Soit $x \in [-1,1] \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$.

i. Montrer que :

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} P(x_k) \frac{T_n(x)(-1)^{k+1}\sqrt{1-x_k^2}}{n(x-x_k)}.$$

ii. En déduire que :

$$|P(x)| \leq \frac{|T_n(x)|}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|x-x_k|}.$$

(c) Soit $x \in [-1, x_n[\cup]x_1, 1]$.

i. Montrer que la décomposition en éléments simples de $\dfrac{T_n'}{T_n}$ est :

$$\frac{T_n'}{T_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - x_k}.$$

ii. Montrer que : $|P(x)| \leq \frac{|T_n'(x)|}{n}$.
iii. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $|\sin(n\theta)| \leq n|\sin(\theta)|$.
iv. En déduire que : $|P(x)| \leq n$.

(d) Soit $x \in [x_n, x_1]$.

i. Montrer que :

$$|P(x)| \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.$$

ii. En déduire que : $|P(x)| \leq n$.

(e) Conclure.