Devoir surveillé n° 1 :

Samedi 21 septembre

3 h

Les résultats doivent être encadrés.
Les calculatrices sont interdites.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Ecrire sous forme de proposition logique la phrase : n n'est pas le carré d'un entier.
2. Ecrire sous forme de proposition logique la phrase : si n est le carré d'un entier alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier. On notera P cette proposition logique.
3. Ecrire et prouver la contraposée de P.
4. Que peut-on en déduire ?

Exercice 2 :
On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

1. Sans calculer le terme général de la suite (u_n), montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{N}.$$
2. Déterminer le terme général de la suite (u_n).

Exercice 3 :
Soit $a \in \mathbb{R}$. En utilisant l'algorithme du pivot de Gauss, résoudre le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x+y+az &=& 1 \\ 3x+y+(a+2)z &=& 1 \\ 3x+y+3z &=& a \end{array}\right.$$

Exercice 4 :
On pose : $f : x \mapsto xe^{1-x}$.

1. Montrer que f est bijective de $]-\infty, 1]$ vers un intervalle I que l'on précisera. On notera $g : I \to]-\infty, 1]$ sa bijection réciproque.
2. Montrer que $g(-e^2) = -1$.
3. Etudier la dérivabilité de g.
4. Calculer $g'(-e^2)$.

Exercice 5 :
Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ f(n) = \begin{cases} n-10 & \text{si } n > 100, \\ f\big(f(n+11)\big) & \text{si } n \leq 100. \end{cases}$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(101-n) = 91.$$

On pourra raisonner par récurrence forte.

Problème 1 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On pose :

$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}. \end{array}$$

1. (a) Etudier les variations de f_n.
   (b) Etudier les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de f_n.
   (c) Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f_n au point d'abscisse $x = 0$.
   (d) Tracer la courbe représentative de f_n.
2. (a) Montrer que f_n est bijective de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I que l'on précisera.
   (b) Déterminer la bijection réciproque de $f_n : \mathbb{R} \to I$.
   (c) Etudier les variations de f_n^{-1}.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$g_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n\left(\frac{\ln 7}{n} - x\right) - 2. \end{array}$$

   Montrer que g_n est impaire.
4. Etudier la vérité des propositions suivantes :
   (a) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = 2$.
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x \in \mathbb{R}, f_n(x) = 2$.

Problème 2 :
On appelle involution de $\mathbb{Z}$ toute application $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, f \circ f(n) = n.$$

1. Montrer qu'il existe une unique involution de $\mathbb{Z}$ strictement croissante et qu'il s'agit de $\begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n. \end{array}$
2. (a) Montrer qu'une involution de $\mathbb{Z}$ n'est pas paire.
   (b) Montrer qu'une involution de $\mathbb{Z}$ n'est pas périodique.
3. Soit f une involution de $\mathbb{Z}$. Montrer que :

$$\forall N \in \mathbb{Z}, \exists! n \in \mathbb{Z}, f(n) = N.$$

4. Soit f une involution de $\mathbb{Z}$ strictement décroissante.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n+1) = f(n) - 1$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = f(0) - n$.
5. (a) Déterminer toutes les involutions de $\mathbb{Z}$ strictement décroissantes.
   (b) Déterminer toutes les involutions de $\mathbb{Z}$ strictement monotones.
   (c) Déterminer toutes les involutions de $\mathbb{Z}$ strictement monotones et impaires.
6. On pose :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & \begin{cases} n+1 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n-1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{array}$$

   (a) Montrer que f est une involution de $\mathbb{Z}$.
   (b) f est-elle strictement monotone ? On justifiera la réponse.