Devoir surveillé n° 2 :

Samedi 12 octobre

3 h

Les résultats doivent être encadrés.
Les calculatrices sont interdites.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 :
Soit p un nombre premier. L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation d'inconnue $(x,y) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$\text{ppcm}(x,y) + p.\text{pgcd}(x,y) = 2p.$$

1. Soit $(x,y) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $\text{ppcm}(x,y) + p.\text{pgcd}(x,y) = 2p$. On pose $d = \text{pgcd}(x,y)$.
   (a) Justifier l'existence de $u, v \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = ud$, $y = vd$ et $\text{pgcd}(u,v) = 1$.
   (b) Montrer que $d | 2p$.
   (c) En déduire que $d = 1$.
   (d) En déduire les valeurs de u et v.
2. Conclure.

Exercice 2 :
Déterminer son ensemble de validité et montrer la formule :

$$\text{Arccos}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 2\text{Arctan}(\sqrt{x}).$$

Exercice 3 :
Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{Arcsin}(3x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(4x).$$

Exercice 4 :
On pose :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor. \end{array}$$

1. Montrer que f est 1-périodique.
2. Calculer $f(x)$ pour $x \in [0,1[$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. En déduire une expression simplifiée de :

$$\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor.$$

Exercice 5 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \text{sh}(2+kx) = 0.$$

Problème 1 :
Soit p un nombre premier tel que $p \geq 3$.
Le but de ce problème est de montrer que :
$$\frac{1}{\pi}\text{Arccos}\left(\frac{1}{p}\right) \notin \mathbb{Q}.$$
On raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tels que :
$$\frac{1}{\pi}\text{Arccos}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{a}{b}.$$

1. (a) Montrer que $\frac{1}{\pi}\text{Arccos}\left(\frac{1}{2}\right) \in \mathbb{Q}$.
   (b) Montrer que $\frac{1}{\pi}\text{Arccos}\left(\frac{1}{p}\right) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
2. Simplifier : $\cos(b\text{Arccos}\left(\frac{1}{p}\right)$.
3. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \cos\left(n\text{Arccos}\left(\frac{1}{p}\right)\right)$.
   (a) Calculer u_0, u_1 et u_2.
   (b) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_n = \frac{2}{p}u_{n+1}.$$
4. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = p^n u_n$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = 2v_{n+1} - p^2 v_n.$$
   (b) Calculer v_0, v_1, v_2 et v_3.
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \in \mathbb{Z}$.
   (d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p | (v_n - 2^{n-1})$.
   (e) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n| \neq 1$.
5. Conclure.

Problème 2 :

1. Préliminaires.
   (a) Montrer que :
   $$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \sin x < x < \tan x.$$
   (b) Montrer que :
   $$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ 2\cos(2x) + 2\tan^2(x) - 2 = -\frac{1}{2}(1 + \tan^2(x))\tan(x)\sin(4x).$$
   (c) Calculer : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\tan x}{x}$.
2. On pose :
   $$f : \begin{array}{ccc} \left]0, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin^2 x + x\tan x - 2x^2. \end{array}$$
   (a) Justifier que f est deux fois dérivable et montrer que :
   $$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ f''(x) = \frac{1}{2}(1 + \tan^2(x))\tan(x)(4x - \sin(4x)).$$
   (b) En déduire que : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ f(x) > 0$.
   (c) En déduire l'inégalité de Winkler :
   $$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \frac{\tan x}{x} > 2.$$
   (d) Montrer que 2 est le meilleur minorant de la fonction $x \mapsto \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \frac{\tan x}{x}$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
3. On pose :
   $$g : \begin{array}{ccc} \left]0, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 + \frac{x}{\tan x} - 2. \end{array}$$
   (a) Justifier que g est dérivable et déterminer une fonction simple h telle que :
   $$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ g'(x) = \left(\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \frac{\tan x}{x} - 2\right).h(x).$$
   (b) En déduire que :
   $$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 + \frac{x}{\tan x} > 2.$$