Devoir surveillé n° 3 :

Samedi 23 novembre

3 h

Les résultats doivent être encadrés.

Les calculatrices sont interdites.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 :

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^n(x)}\,dx.$$

1. Calculer u_0.
2. Calculer u_2.
3. (a) Montrer que :

$$u_1 = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{1-t^2}\,dt.$$

   (b) En déduire la valeur de u_1.
4. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{(\sqrt{2})^n}{n+1} + \frac{n}{n+1}u_n.$$

Exercice 2 :

1. Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$ l'équation différentielle :

$$y' - \frac{2}{x}y = 0.$$

2. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$ de :

$$x \mapsto \frac{\ln x}{x^3}.$$

3. Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$ l'équation différentielle :

$$y' - \frac{2}{x}y = -\frac{\ln x}{x}.$$

Problème 1 :
Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. On définit :

$$f_\alpha \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \ln(1-2\alpha\cos(t)+\alpha^2). \end{array}$$

1. Montrer que f_α est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
   On pose alors :
$$J_\alpha = \int_0^\pi f_\alpha(t)\,dt.$$
2. (a) Montrer que, si $\alpha \neq 0$:
$$J_{1/\alpha} = J_\alpha - 2\pi\ln(|\alpha|).$$
   (b) En effectuant le changement de variable $t = \pi - x$, montrer que $J_\alpha = J_{-\alpha}$.
   (c) En intégrant par parties, déterminer une relation entre J_α et :
$$I_\alpha = \int_0^\pi \frac{t\sin(t)}{1-2\alpha\cos(t)+\alpha^2}\,dt.$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:
$$z^{2n} - 1 = 0$$
   admet $2n$ solutions distinctes notées β_k, $k \in [\![0, 2n-1]\!]$ que l'on déterminera.
   On admet que :
$$\forall z \in \mathbb{C},\, z^{2n} - 1 = \prod_{k=0}^{2n-1}(z-\beta_k).$$
   (b) Calculer et simplifier β_0 et β_n.
   (c) Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $2n-k \in [\![n+1, 2n-1]\!]$ et $\overline{\beta_k} = \beta_{2n-k}$.
   (d) Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C},\ \prod_{k=n+1}^{2n-1}(z-\beta_k) = \prod_{k=1}^{n-1}(z-\overline{\beta_k})$.
   (e) En déduire que :
$$\frac{\alpha^{2n}-1}{(\alpha+1)(\alpha-1)} = \prod_{k=1}^{n-1}(\alpha-\beta_k)(\alpha-\overline{\beta_k}) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(\alpha^2 - 2\alpha\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right).$$
   (f) On admet que :
$$J_\alpha = \lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\alpha^2-2\alpha\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right).$$
   Montrer que :
$$J_\alpha = \lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{\alpha^{2n}-1}{(\alpha+1)(\alpha-1)}\right).$$
4. (a) Montrer que $J_\alpha = 0$ si $\alpha \in]-1, 1[$.
   (b) En déduire J_α si $|\alpha| > 1$. On pourra utiliser un des résultats de la question 2.
5. Calculer :
$$\int_0^\pi \frac{t\sin(t)}{5-4\cos(t)}\,dt.$$

Problème 2 :
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On pose :

$$z_n = e^{2i\pi/n} \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{n-1} z_n^{(k^2)}.$$

L'objectif de ce problème est de calculer $|S_n|$.

1. (a) Donner les valeurs de z_n^n et de $\sum_{k=0}^{n-1} z_n^k$.
   (b) Montrer que $|S_n| \leq n$.
2. (a) Calculer S_2 et $|S_2|$.
   (b) Calculer S_3 et $|S_3|$.
   (c) Calculer S_4 et $|S_4|$.
3. Dans cette question, on cherche à calculer $|S_5|$.
   (a) Montrer que :
   $$S_5 = 1 + 4\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$
   (b) Montrer que :
   $$1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = 0.$$
   (c) En déduire que :
   $$1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0.$$
   (d) En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est racine d'une équation du second degré que l'on déterminera.
   (e) En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
   (f) Calculer S_5 et $|S_5|$.
4. Dans cette question, on cherche à calculer $|S_7|$.
   (a) Montrer que :
   $$S_7 = 1 + 2(z_7 + z_7^2 + z_7^4) \text{ et } \overline{S_7} = 1 + 2(z_7^3 + z_7^5 + z_7^6).$$
   (b) En déduire la valeur de $S_7.\overline{S_7}$.
   (c) En déduire la valeur de $|S_7|$.
5. On s'intéresse maintenant au cas général.
   (a) Soit $j \in \mathbb{Z}$, montrer que :
   $$\sum_{k=0}^{n-1} z_n^{kj} = \begin{cases} n & \text{si } n|j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   (b) Montrer que :
   $$|S_n|^2 = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1} z_n^{l^2-j^2}.$$
   (c) Soit $j \in \mathbb{Z}$.
      i. Soit $l \in \mathbb{Z}$, montrer que :
      $$\sum_{k=l+1}^{l+n} z_n^{-2kj+k^2} - \sum_{k=l}^{l+n-1} z_n^{-2kj+k^2} = 0.$$
      ii. En déduire que :
      $$\forall l \in \mathbb{Z}, \sum_{k=l}^{l+n-1} z_n^{-2kj+k^2} = \sum_{k=0}^{n-1} z_n^{-2kj+k^2}.$$
   (d) Montrer que :
   $$|S_n|^2 = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} z_n^{-2kj+k^2}.$$
   (e) Montrer que, si n est impair :
   $$|S_n| = \sqrt{n}.$$
   (f) Calculer $|S_n|$ quand n est pair.