PCSI 1

Devoir surveillé n° 4 :

2024/2025

Samedi 14 décembre

3 h

Les résultats doivent être encadrés.

Les calculatrices sont interdites.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 :

On pose :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+2y, y-x, 42). \end{array}$$

f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Problème 1 :

L'objectif de ce problème est de déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2\left(2f'(x)+1\right) \quad (E).$$

1. Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ dérivable vérifiant (E). Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de :

$$4x^4y'' + 8x^3y' + x^2y = 1 - 4x^3 \quad (E').$$

2. Soit y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. On pose : $z: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & y(e^t) \end{array}$. Montrer que :

$$4x^4y'' + 8x^3y' + x^2y = 1 - 4x^3 \iff 4z'' + 4z' + z = e^{-2t} - 4e^t.$$

3. Résoudre (E') sur $\mathbb{R}^{+*}$.
4. Conclure.

Problème 2 :

Soit E un ensemble, soient A et B des parties de E. On considère les applications suivantes :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & (\overline{X} \cup A) \setminus B \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & \overline{X}. \end{array}$$

1. Montrer que g est bijective et que $g^{-1} = g$.
2. Simplifier la fonction f dans les cas :
   (a) $A = \emptyset$,
   (b) $A = E$,
   (c) $B = \emptyset$,
   (d) $B = E$.
3. Calculer $f(\emptyset)$, $f(A)$, $f(B)$, $f\left(\overline{A}\right)$, $f\left(\overline{B}\right)$ et $f(E)$.
4. Montrer que $f \circ f = f \circ g$.
5. Montrer que f est bijective ssi $f = g$.
6. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit bijective.

Problème 3 :

Partie 1 : Théorème de Césaro monotone

Soit (u_n) une suite croissante qui converge vers $l \in \mathbb{R}$.

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

1. (a) Montrer que (v_n) est majorée par l.
   (b) Montrer que (v_n) est croissante.
   (c) En déduire que (v_n) converge vers $L \in \mathbb{R}$ avec $L \leq l$.
2. (a) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ 2v_{2n+1} - v_n \geq u_n.$$
   (b) En déduire que $L = l$.
   (c) Conclure.

Partie 2 : Une application

On définit la suite (a_n) par :

$$a_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{1+a_n}}.$$

1. (a) Montrer que (a_n) est bien définie et qu'elle est à valeurs dans $]0,+\infty[$.
   (b) Montrer que (a_n) converge et déterminer sa limite.
2. On pose :
   $$f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}. \end{array}$$
   Montrer que f est décroissante.
3. On pose :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}.$$
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, exprimer b_n en fonction de a_n et de f.
   (b) Montrer que (b_n) est croissante.
   (c) Montrer que (b_n) converge et déterminer sa limite.
4. On pose :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} b_k.$$
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer c_n en fonction de n, de a_n et de a_0.
   (b) Montrer que :
   $$\lim_{n \to +\infty} n a_n = 2.$$

Partie 3 : Une application de l'application

On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \sqrt{u_n}.$$

1. Montrer que (u_n) est bien définie et qu'elle est à valeurs dans $]0,+\infty[$.
2. Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.
3. Calculer :
   $$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n^2}.$$