PCSI 1

Devoir surveillé n° 5 :

2024/2025

Samedi 18 janvier

3 h

Les résultats doivent être encadrés.

Les calculatrices sont interdites.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 :

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Calculer :
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+x^2}-\sqrt{x^4+1}\right).$$
2. On pose :
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \left(1+x(\ln x)^2\right)^{\frac{1}{\ln x}}. \end{array}$$
La fonction est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
3. On pose :
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^{+} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{\lfloor x\rfloor}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0. \end{cases} \end{array}$$
Etudier la continuité de f.

Problème 1 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'objectif de ce problème est d'étudier les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$.

Partie 1 : Propriétés de la trace

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle trace de A et on note $\operatorname{tr}(A)$, le réel :

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

1. Montrer que : $\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(MN) = \operatorname{tr}(NM)$.
2. Montrer que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall P \in GL_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(PMP^{-1}) = \operatorname{tr}(M)$.

Partie 2 : Cas général en taille 2

3. Déterminer les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$.
   Montrer que $\operatorname{tr}(A) \in \{0, 1, 2\}$.
5. (a) Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$ et $\operatorname{tr}(A) = 0$.
   (b) Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$ et $\operatorname{tr}(A) = 2$.
6. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$.
   Montrer que $A \in GL_2(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \operatorname{tr}(A) = 2$.

Partie 3 : Un exemple en taille 3

On pose :

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Calculer $\operatorname{tr}(A)$.
8. (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (b) Calculer $D = P^{-1}AP$.
   (c) A est-elle inversible ?
9. Sans calculer A^2, montrer que $A^2 = A$.
10. (a) Montrer que $I_3 + A$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de I_3 et A.
    (b) Montrer que $I_3 - A$ n'est pas inversible.
11. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
    (a) Montrer qu'il existe $D_1, D_2 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on déterminera telles que $I_3 + A = PD_1P^{-1}$ et $I_3 - A = PD_2P^{-1}$.
    (b) Calculer $(I_3 + A)^p$.
    (c) Calculer $(I_3 - A)^p$.

Partie 4 : Etude avec une hypothèse supplémentaire en taille n

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans toute cette partie, on suppose que $A^2 = A$ et qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.

12. Quelles sont les matrices inversibles vérifiant ces hypothèses ?
13. Montrer que $\operatorname{tr}(A) \in [\![0, n]\!]$.
14. Montrer que $A \in GL_n(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \operatorname{tr}(A) = n$.
15. (a) Montrer que $I_3 + A$ est inversible et qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ que l'on déterminera tel que $(I_3 + A)^{-1} = aI_3 + bA$
    (b) Montrer que $I_3 - A$ n'est pas inversible.
16. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
    (a) Calculer $(I_3 + A)^p$.
    (b) Calculer $(I_3 - A)^p$.

Partie 5 : Décomposition en taille n

Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, on note $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker :

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si i=j,} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout $(r, s) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $E_{r,s}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient (r, s) qui vaut 1.
On pose :

$$\mathcal{E} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A^2 = A\}.$$

17. Soient $r, s, k, l \in [\![1, n]\!]$.
    Montrer que $E_{r,s}.E_{k,l} = \delta_{s,k} E_{r,l}$.
18. (a) Soit $r \in [\![1, n]\!]$, montrer que $E_{r,r} \in \mathcal{E}$.
    (b) Soit $r, s \in [\![1, n]\!]$ tels que $r \neq s$, montrer que $E_{r,r} + E_{r,s} \in \mathcal{E}$.
19. Montrer que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{E}$.
20. Toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit-elle comme somme d'éléments de $\mathcal{E}$?

Problème 2 :
L'objectif de ce problème est de trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = f(x) f(y). \qquad (*)$$

1. Déterminer les fonctions constantes vérifiant $(*)$.

Dans toute la suite du problème, on considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, non nulle vérifiant $(*)$.

2. Montrer que f est paire.
3. Montrer que $f(0) = 1$.
4. Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $f(x_0) = 0$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = \frac{x_0}{\sqrt{2^n}}.$$

   (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) = 0.$$

   (b) En déduire une contradiction et conclure.
5. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$.
6. On pose :

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(f(\sqrt{x})\right). \end{array}$$

   (a) Montrer que g est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Montrer que :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ g(x + y) = g(x) + g(y).$$

   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ g(nx) = n g(x)$.
   (d) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{Q}^+,\ g(x) = x g(1)$.
   (e) En déduire qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g(x) = ax.$$

7. En déduire f.
8. Conclure.