Devoir surveillé n° 6 :

Samedi 8 février

3 h

Les résultats doivent être encadrés.
Les calculatrices sont interdites.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 :
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
On pose :

$$h : \begin{array}{rcl} [a,b[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \big(f(x) - f(a)\big)\, e^{\frac{1}{x-b}}. \end{array}$$

1. Montrer que h est dérivable sur $]a,b[$ et calculer h'.
2. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :
$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{(c-b)^2}.$$

Exercice 2 :
Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que :

$$P(X+1) - P(X-1) = X^2 + 1.$$

Problème 1 :

1. Question préliminaire
   (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \sin x \leq x$.
   (b) i. On pose :
   $$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sin x + \frac{x^3}{6}. \end{array}$$
   Montrer que φ est convexe.
   ii. En déduire que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^+, \sin x + \frac{x^3}{6} \geq x.$$
   (c) Montrer que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x - x| \leq \frac{|x|^3}{6}.$$
   (d) En déduire :
   $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^2}.$$
2. On pose :
   $$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$
   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que f est bornée.
   (c) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer qu'il existe $c_k \in]k\pi, (k+1)\pi[$ tel que $f'(c_k) = 0$.
   (b) On pose :
   $$\begin{array}{rccl} g : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x\cos x - \sin x \end{array}.$$
   Etudier les variations de g sur $[k\pi, (k+1)\pi]$.
   (c) En déduire que c_k est unique.
   (d) Etudier les variations de f sur $[k\pi, (k+1)\pi]$.
4. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = \alpha$ et qu'on a alors $\alpha \in]0, 1[$.
5. (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, |g(x)| \leq \frac{x^2}{2}$.
   (b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
6. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
   $$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$
   (a) Monter que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$.
   (b) Montrer que (u_n) converge vers α.

Problème 2 :

On considère la fonction f suivante :

$$f: \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \end{array}$$

1. (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
   $$\forall x \in]0,+\infty[,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}}e^{-\frac{1}{x}}$$
   $$\text{et } P_{n+1} = X^2 P_n' + (1-2(n+1)X)P_n.$$
   (c) Calculer P_0, P_1, P_2 et P_3.
   (d) Calculer le degré, le coefficient dominant et le terme constant de P_n.
2. On considère la fonction suivante :
   $$g: \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 f(x). \end{array}$$
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $g^{(n+1)} = f^{(n)}$.
   (b) En utilisant la formule de Leibniz pour calculer $g^{(n+1)}$, montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_{n+1} = (1-2(n+1)X)P_n - n(n+1)X^2 P_{n-1}.$$
3. (a) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n' = -n(n+1)P_{n-1}.$$
   (b) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ X^2 P_n'' + (1-2nX)P_n' + n(n+1)P_n = 0.$$