Devoir surveillé n° 7 :

Samedi 22 mars

3 h

Les résultats doivent être encadrés.

Les calculatrices sont interdites.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 :

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de :
$$f : x \mapsto e^{\sqrt[3]{1+x}}.$$
2. Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de :
$$g : x \mapsto \frac{\ln(1+2x)}{\sin(2x)}.$$
3. Calculer :
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - \cos(x)}{\sin(x) - \ln(1+x)}.$$

Exercice 2 :

On pose $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $F = \mathrm{Vect}\,(I_2)$ et $G = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E,\ a+d=0\right\}$.

1. Déterminer la dimension de F.
2. Déterminer la dimension de G.
3. Montrer que :
$$F \oplus G = E.$$

Problème 1 :

Les parties 1 et 2 sont indépendantes. La partie 3 utilise les résultats des parties 1 et 2.

Partie 1 : Polynômes et nombres de Bernoulli

1. (a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q' = P$ et $\int_0^1 Q(x)dx = 0$.
   (b) En déduire qu'il existe une unique suite de polynômes à coefficients réels $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
   $$B_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, B_n' = nB_{n-1} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 B_n(x)dx = 0.$$
   Les polynômes B_n sont appelés les polynômes de Bernoulli.
2. (a) Calculer B_0, B_1, B_2 et B_3.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de B_n.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que la famille $(B_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. On pose :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = B_n(0).$$
   Les nombres b_n sont appelés les nombres de Bernoulli.
   (a) Calculer b_0, b_1, b_2 et b_3.
   (b) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k}X^k.$$
   (c) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, C_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$.
      i. Montrer que :
      $$C_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, C_n' = nC_{n-1} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 C_n(x)dx = 0.$$
      ii. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$.
      iii. En déduire que : $\forall p \in \mathbb{N}, B_{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.
4. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, B_n(X) = 2^{n-1}\left(B_n\left(\frac{X}{2}\right) + B_n\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)$.
   (b) En déduire que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, b_{2p+1} = 0$ et que $\forall n \geq 2, B_n(1) = b_n$.
5. (a) Montrer que : $\forall n \geq 2, \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} = 0$.
   (b) En déduire, une formule de récurrence permettant d'exprimer b_{n+1} en fonction de $b_0, b_1, \ldots, b_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Sans calculer le polynôme B_4, calculer le nombre b_4.

Partie 2 : Des développements limités

6. On considère la fonction :
   $$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{x}{e^x-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$
   (a) Montrer que f est continue en 0.
   (b) Calculer le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
      i. Calculer le développement limité de $x \mapsto \frac{e^x-1}{x}$ à l'ordre n en 0.
      ii. En déduire que f admet un développement limité d'ordre n en 0.
   Ce développement limité sera noté :
   $$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!}x^k + o(x^n).$$
   (d) En remarquant que $\forall x \in \mathbb{R}, x = f(x)(e^x - 1)$, montrer que :
   $$\forall n \geq 2, \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k} = 0.$$
7. On considère la fonction :
   $$g : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \end{array}.$$
   (a) Montrer que $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 1 - g(x)^2$.

(c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, g^{(n+1)}(x) = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que g admet un développement limité d'ordre n en 0.
Ce développement limité sera noté :

$$g(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + o(x^n).$$

(e) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)c_{n+1} = -\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}.$$

8. On considère la fonction :

$$h: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) + \frac{x}{2}. \end{array}$$

(a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(4x) - h(2x) = x g(x)$.
(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{2k}}{(2k)!} 4^k (4^k - 1) x^{2k-1} + o(x^{2n}).$$

Partie 3 : Le développement limité de la fonction tangente

9. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n.$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}$.
(a) Montrer que tan admet un développement limité d'ordre n en 0.
Ce développement limité sera noté :

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} d_k x^k + o(x^n).$$

(b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)d_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} d_k d_{n-k}.$$

(c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, d_{2n-1} = (-1)^{n-1} c_{2n-1}.$$

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire l'expression du développement limité de la fonction tangente à l'ordre $2n$ en 0 en fonction des nombres de Bernoulli.