Indications
DM 3

Problème 1 :

1. Calcul explicite.
2. Exprimer H_{n+1} en fonction de H_n et ne pas oublier que n est pair.
3. (a) Dans H_{n+1} faire un découpage en séparant les termes pairs et les termes impairs.
   (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2k+1}$ est une somme de fractions, on calcule cette somme en faisant une mise au même dénominateur. Le dénominateur commun est : $\displaystyle\prod_{j=0}^{m}(2j+1)$, il faut étudier sa parité. Le numérateur n'a pas besoin d'être simplifié, il doit uniquement être entier.
4. Raisonner par récurrence forte et faire une disjonction de cas :
   - si n est pair, utilise l'hypothèse de récurrence au rang n,
   - si n est impaire, $n = 2m+1$, utiliser l'hypothèse de récurrence au rang $m+1$.
5. Raisonner par l'absurde.

Problème 2 :

1. Utiliser les racines n-ièmes de l'unité.
2. (a) Factoriser par l'angle moitié.
   (b) Remplacer avec les valeurs trouvées dans 1.
   (c) A partir de l'expression de 2.b, faire une factorisation par l'angle moitié.
   Se ramener à un produit de deux produits : le produit de sinus recherché et un produit d'exponentielles.
   Remarquer que le produit d'exponentielles est l'exponentielle de la somme.
   Remarquer également que $e^{i\pi(n-1)/2} = i^{n-1}$.
3. Calculer $\sin(na)$.
4. (a) Isoler le terme $k = 0$.
   (b) Remarquer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + a\right) = \frac{\sin(na)}{2^{n-1}\sin(a)} = \frac{\sin(na)}{na}\frac{a}{\sin(a)}\frac{n}{2^{n-1}}$ puis faire tendre a vers 0.
5. (a) Faire le changement d'indice $j = 2n+1-k$.
   (b) Découper le produit de 4.b.