Indications
DM 4

Problème 1 :

1. (a) Primitives usuelles.
   (b) Factoriser le numérateur par x^n.
   (c) Utiliser les questions précédentes.
2. (a) Etudier le signe de $I_{n+1} - I_n$.
   (b) Montrer que (I_n) admet une limite en utilisant le théorème de convergence monotone et calculer la limite en faisant un passage à la limite dans la relation de 1.b.
3. (a) Récurrence sur p.
   (b) Utiliser 2.b.
4. (a) Récurrence sur p.
   (b) Utiliser 2.b.
5. Poser $u(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ et $v'(x) = px^{p-1}$ pour l'intégration par parties.
   Puis montrer que : $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x^2)x^p}{(1+x^2)^2}\,dx \leq I_p$.

Problème 2 :

1. Primitives usuelles.
2. (a) Linéariser $\cos^2 u$ en utilisant la formule de $\cos(2u)$ et utiliser les formules de trigonométrie réciproque.
   (b) Poser $u(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ et $v'(t) = 1$ pour l'intégration par parties.
3. (a) Faire une intégration par parties en s'inspirant de 2.b.
   (b)
4. Par récurrence avec des calculs !
5. (a) Faire le même changement de variable que dans 2.a.
   (b) Remarquer que $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^{2n}(t)\,dt = F_{n+1}(1)$ et utiliser les questions précédentes.