Indications
DM 5

Problème 1 :

1. (a)
   (b)
2. (a)
   (b)
3. (a) Effectuer une intégration par parties.
   (b) Utiliser F comme solution particulière.
4. (a) Remarquer que $x \mapsto \int_0^x f(t)\sin(t)dt$ est une primitive de $x \mapsto f(x)\sin(x)$ (qui est donc sa dérivée) et que $x \mapsto \int_{\pi/2}^x f(t)\cos(t)dt$ (attention au sens des bornes) est une primitive de $x \mapsto f(x)\cos(x)$.
   (b) Utiliser F comme solution particulière.
5. (a) Remarquer que $T(f)'' + T(f) = f$.
   (b) Montrer que T n'est pas surjective en raisonnant par l'absurde et en remarquant que $T(f)(0) = 0$.
6. (a) Pour $\lambda \neq 0$, raisonner par l'absurde et remarquer qu'alors $T(f) = 0 = T(0)$.
   Remarquer que $T(f)$ est solution de $y'' + y = f$.
   (b)
   (c) Résoudre $f'' - \omega^2 f = 0$.
   (d) Résoudre $f'' + \omega^2 f = 0$. Les conditions aux limites doivent donner un produit nul.

Problème 2 :

1. (a)
   (b)
2.
3. (a) Il suffit d'écrire une inclusion.
   (b) Calculer $f \circ f(X)$ en utilisant la question précédente.
4. (a) Montrer que $(i) \Rightarrow (ii)$ puis $(ii) \Rightarrow (iii)$ puis $(iii) \Rightarrow (i)$.
   Pour $(i) \Rightarrow (ii)$: utiliser l'hypothèse d'injectivité sur la relation $g(g(y)) = g(y)$.
   Pour $(ii) \Rightarrow (iii)$: utiliser l'hypothèse de surjectivité pour montrer que $g(y) = y$.
   (b) La question précédente donne f bijective ssi $f = Id_{\mathcal{P}(E)}$.
   Si $f = Id_{\mathcal{P}(E)}$, utiliser $f(\emptyset)$ et $f(E)$ pour avoir les ensembles A et B.
   Avec les bons ensembles A et B, la réciproque est simple.