

Problème 1 :

1. (a)
(b) Il suffit d'exhiber une matrice qui convient.
(c) Reconnaître une suite géométrique.
2. (a) On prouve en même temps l'inversibilité et le calcul de l'inverse.
(b) C'est un résultat du cours, il n'est pas utile de faire la récurrence.
(c) On calcule.
3. (a)
(b) Appliquer la formule du binôme de Newton.
(c) On calcule.
4. (a) Utiliser 1.c.
(b) Utiliser une croissance comparée.

Problème 2 :

1. Raisonner par équivalences.
2. En appliquant (E) à des valeurs bien choisies, montrer que $f(0) = 1$ ou -1 ou 0 .
Montrer que $f(0) = 0$ est en contradiction avec f non constante.
- 3.
4. (a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, f(\frac{x}{2^n}) = 0$ et utiliser un passage à la limite.
(b) Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.
5. Appliquer (E) à des valeurs bien choisies.
6. (a)
(b)
7. (a)
 - En appliquant (E) à des valeurs bien choisies, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n+2) + \varphi(n) = 2(\varphi(n+1) + \varphi(1))$.
 - Raisonner par récurrence double pour $n \in \mathbb{N}$.
 - Utiliser la parité pour $n \in \mathbb{Z}^{-*}$.
(b) Raisonner par récurrence double en utilisant la même idée qu'à la question précédente.
(c) Utiliser les deux questions précédentes.
(d) Ecrire x comme la limite d'une suite de rationnels.
8. Raisonner par analyse-synthèse.