Indications
DM 7

Problème 1 :

Questions préliminaires :

1. Raisonner par l'absurde.
2. (a)
   (b) Appliquer le théorème de Rolle.

Résultat général :

3. Appliquer la formule de Taylor-Lagrange entre x et $x+\lambda$.
4. (a) Remarquer que $f''=0$ et en déduire que f est constante.
   (b) Utiliser 1.

Application :

On pose $g=\sqrt{f}$.

5. Résultat de composition.
6. (a)
   (b) Raisonner par l'absurde.
   Etudier les variations de f au voisinage de x_0, et remarquer que si $f''(x_0)$ était strictement négatif, f prendrait des valeurs strictement négatives.
   (c)
   - Appliquer la formule de Taylor-Lagrange entre x_0 et x pour trouver un point noté c_x.
   - Exprimer le taux d'accroissement de g en fonction de c_x et calculer ses limites en x_0^+ et x_0^-.
7. Attention, ça va devenir difficile ! Vous pouvez vous arrêter.
   (a) Appliquer l'inégalité des accroissements finis entre x et x_0.
   (b)
   - Calculer le discriminant de τ.
   - Utiliser la formule pour la somme des racines d'une équation du second degré.
   - Appliquer la formule de Taylor-Lagrange entre x et $x+\mu$.
   - Utiliser le signe d'une polynôme du second degré.
   - Trouver une contradiction avec le signe de f.
8. On étudie le caractère $\mathcal{C}^1$ en x_0.
   - Si $f(x_0)\neq 0$, il n'y a pas de problème. On continue avec $f(x_0)=0$.
   - Raisonner comme dans 6.a pour montrer que g est dérivable en x_0 et que $g'(x_0)=0$.
   - Utiliser la définition de la limite pour montrer que $\lim_{x\to x_0} g'(x)=g'(x_0)=0$. Il faut bien choisir les variables pour se ramener à la question 7.

Problème 2 :

1. (a)
   (b) Les limites en $\pm\infty$ de S_n sont connues et dépendent de la parité de n. Il faut également étudier les variations.
2. (a) Montrer que $P_n'(\alpha_n)\neq 0$.
   (b)
      i. Regrouper les indices pairs et les indices impairs.
      ii. Remarquer que P_n est strictement décroissante et calculer $P_n(-1)$ et $P_n(-(2n+1))$.
   (c)
      i. Ecrire P_{n+1} en fonction de P_n.
      ii. Comparer $P_{n+1}(\alpha_n)$ et$P_{n+1}(\alpha_{n+1})$
   (d)
      i. Appliquer l'inégalité des accroissements finis sur $[l,0]$.
      ii.
      iii.
   (e)