Indications
DM 8

Problème 1 : Méthode de Newton

1.
   - Raisonner par récurrence.
   - Avec des arguments de signes, montrer que $x_{n+1} \leq x_n \leq b$.
   - Avec un argument de convexité (en utilisant la tangente en x_n), montrer que $x_{n+1} \geq c$.
2.
   - Montrer que (x_n) est décroissante et minorée.
   - Utiliser l'unicité du zéro de f.
3. (a)
   - Calculer g'.
   - Majorer $|f''|$ par une constante.
   - Encadrer f' par deux constantes strictement positives.
   - Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour majorer $|f|$.

   (b)
   - Appliquer l'inégalité des accroissements finis à g en veillant bien à ce que $|g'|$ soit majorée par une constante.
   - Remarquer que $x_{n+1} = g(x_n)$.
4. Raisonner par récurrence.
5. Faire une remarque rapide sur la vitesse de convergence.

Problème 2 : Polynômes d'interpolation de Lagrange

1. (a) Il s'agit de calculer le degré d'un produit.

   (b) Raisonner par disjonction de cas.

   (c)
   - Raisonner par analyse-synthèse.
   - Pour l'analyse : évaluer la relation en a_k et utiliser 1.(a).
   - Pour la synthèse : comparer le nombre de racines et le degré sur polynôme $P - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i$.

   (d) La question précédente et une équivalence doivent donner une réponse très rapide.

   (e)
   i. Avec un argument de multiplicité, la réponse se fait en une ligne.
   ii. Ecrire Φ sous la forme $\Phi = (X - a_i)\Phi_i$ et dériver cette relation. On utilisera la valeur de Q trouvée en 1.d.
2. Appliquer le théorème des bornes atteintes à $|f|$.
3. (a)
   i. Il suffit de vérifier qu'on ne divise pas par 0.
   ii. On peut trouver explicitement $n+1$ points d'annulation de φ. On applique ensuite le théorème de Rolle.
   iii. Comme, dans la question précédente, on a justifié rigoureusement le passage de φ à φ', on peut énoncer sans preuve un résultat qui se prouverait par récurrence.
   iv. Remarquer que $P^{(n)} = 0$ et montrer que $\Phi^{(n)} = n!$.

   (b) Ne pas oublier te traiter le cas où $t \in \{a_1, \dots, a_n\}$.