Indications
DM 9

1. (a)
   (b) Etudier les racines du polynôme : $Q = P - \sum_{i=1}^{n} P(a_i)L_i$.
   (c) Dans la relation $P = \sum_{i=1}^{n} P(a_i)L_i$, calculer le coefficient de X^{n-1}.
2. (a) Avec la formule du binôme de Newton, calculer $(1+1)^n + (1-1)^n$.
   (b) Déterminer le degré et le coefficient dominant de chaque terme intervenant dans la somme.
   (c) • Pour montrer que $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$: exprimer $\cos(n\theta)$ avec la formule de Moivre et le binôme de Newton. Remarquer que i^k est réel quand k est pair et imaginaire pur quand k est impair afin de ne conserver que les indices pairs dans la somme.
   • Pour l'unicité : considérer un autre polynôme et étudier les racines de la différence.
   (d) Montrer que les x_k sont les racines distinctes de T_n.
3. (a) Se ramener à $T_n(\cos\theta)$.
   (b) Montrer que $\deg(Q) \leq n$ puis étudier le coefficient de X^n.
   (c) i. En fonction de la parité de k, montrer que $Q(z_k) = \pm\frac{1}{2^{n-1}} - W(z_k)$ et utiliser $|W(z_k)| \leq \sup_{x\in[-1,1]} |W(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$.
   ii. Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.
   iii. Compter les racines de Q.
   (d) i. • Reprendre le raisonnement de 3.c.i avec des inégalités larges pour avoir le signe de $Q(z_k)$.
   • Remarquer que les z_k sont classés par ordre strictement décroissant pour avoir le signe de $z_k - z_j$.
   • Compter les termes positifs et négatifs dans le produit.
   ii. Utiliser la question 1.c appliquée aux **n+1** points $z_0, \dots, z_n$. On pensera bien à remplacer n par $n+1$ et à modifier l'indexation du produit et de la somme.

   (a) i. Remarquer que $T_n = 2^{n-1}(X - x_k)Q_k$ et dériver.
   ii. Injecter le résultat de la question précédente dans la définition de L_k.
   iii. • Dériver par rapport à θ la relation $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
   • Appliquer le résultat précédent à $\theta = \frac{(2k-1)\pi}{2n}$ et faire un peu de trigonométrie.
   (b) i. Partir de 1.b et utiliser les questions précédentes.
   ii. Utiliser l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de la question 4.
   (c) i. Donner la forme de la décomposition et multiplier plui évaluer.
   ii. Il faut faire très attention à la position des valeurs absolues dans cette question !
   • Faire une disjonction de cas : $x \in [-1, x_n[$ et $x \in]x_1, 1]$ pour avoir le signe de $x - x_k$.
   • Montrer, dans chaque cas, que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|x - x_k|} = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - x_k}\right|$.
   iii. Par récurrence.
   iv. Poser $\theta = \operatorname{Arccos} x$.
   (d) i. Par hypothèse : $|P(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et utiliser $x \leq x_1$.
   ii. Appliquer 4.c.iii à $\theta = \frac{\pi}{2n}$.
   (e)