Révisions de rentrée 2

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n : \begin{array}{rcl}]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \ln(1+x). \end{array}$$

1. **Etude des fonctions f_n**
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) On note h_n la fonction définie par :
   $$h_n : \begin{array}{rcl}]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}. \end{array}$$
   Etudier le sens de variations de la fonction h_n sur $]-1,+\infty[$.
   Calculer $h_n(0)$ puis en déduire le signe de h_n sur $]-1,+\infty[$.
   (b) Etudier le sens de variations de la fonction f_1 sur $]-1,+\infty[$.
   Construire alors le tableau de variations de f_1 en précisant les valeurs en les points remarquables et les limites aux bornes du domaine de définition.
   (c) Dans cette question, n est supposé supérieur ou égal à 2.
   Etudier le sens de variations de la fonction f_n sur $]-1,+\infty[$ (on sera amené à discuter sur la parité de n).
   Construire alors le tableau de variations de f_n en précisant les valeurs en les points remarquables et les limites aux bornes du domaine de définition.
2. **Etude de la suite $\left(\int_0^1 f_n(x)\,dx\right)$**
   On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$
   (a) **Calcul de I_1**
      i. Prouver l'existence de trois réels a, b et c tels que :
      $$\forall x \in [0,1],\ \frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}.$$
      ii. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$.
      iii. Calculer la dérivée de la fonction g définie par :
      $$g : \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^2}{2}\ln(1+x). \end{array}$$
      iv. En déduire la valeur de I_1.
   (b) **Convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$**
      i. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone.
      ii. Justifier la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (on ne demande pas sa limite).
      iii. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \le I_n \le \dfrac{\ln 2}{n+1}$ et en déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Correction commentée

1. (a)
   - Comme $x \mapsto 1+x$ est strictement positive sur $]-1,+\infty[$ et ln dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ alors, par opérations, h_n est dérivable sur $]-1,+\infty[$.
   - Soit $x \in]-1,+\infty[$, on a :
   $$h_n'(x) = \frac{n}{1+x} + \frac{(1+x)-x}{(1+x)^2} = \frac{n(1+x)+1}{(1+x)^2}.$$
   Or $1+x>0$ donc $h_n'(x)>0$.
   - Ainsi h_n est strictement croissante sur $]-1,+\infty[$.
   - $h_n(0) = n\ln(1)+0 = 0$
   - Comme h_n est strictement croissante sur $]-1,+\infty[$ et $h_n(0)=0$, on a :
   $$\forall x \in]-1,0[,\ h_n(x)<0, \quad h_n(0)=0, \quad \forall x \in]0,+\infty[,\ h_n(x)>0.$$

✎ *La dérivabilité doit être justifiée rapidement.*

✎ *La fonction h_n est strictement croissante mais on ne peut pas écrire $h_n(x)$ est strictement croissante.*

(b)

- Comme $x \mapsto 1+x$ est strictement positive sur $]-1,+\infty[$ et ln dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ alors, par opérations, f_1 est dérivable sur $]-1,+\infty[$.
- Soit $x \in]-1,+\infty[$, on a :
$$f_1'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} = h_1(x).$$
- On a : $\lim\limits_{x\to -1} f_1(x) = +\infty$, $f_1(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f_1(x) = +\infty$.

  Donc, d'après la question précédente :

x	-1		0		$+\infty$
$f_1'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f_1	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

✎ *Les limites qui ne sont pas des formes indéterminées n'ont pas besoin d'être justifiées.*

(c)

- Par opérations, f_n est dérivable sur $]-1,+\infty[$.
- Soit $x \in]-1,+\infty[$, on a :
$$f_n'(x) = nx^{n-1}\ln(1+x) + \frac{x^n}{1+x} = x^{n-1}\left(n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}\right) = x^{n-1}h_n(x).$$
  - Si n est impair, alors $n-1$ est pair et donc $x^{n-1} \geq 0$, ainsi f_n' est du signe de h_n.
    De plus, $\lim\limits_{x\to -1} x^n = -1$ donc $\lim\limits_{x\to -1} f_n(x) = +\infty$, $f_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f_n(x) = +\infty$.
    Donc :

x	-1		0		$+\infty$
$f_n'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f_n	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

  - Si n est pair, alors $n-1$ est impair et donc x^{n-1} est du signe de x, ainsi :

x	-1		0		$+\infty$
x^{n-1}	‖	$-$	0	$+$	
$h_n(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f_n'(x)$	‖	$+$	0	$+$	

    De plus, $\lim\limits_{x\to -1} x^n = 1$ donc $\lim\limits_{x\to -1} f_n(x) = -\infty$, $f_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f_n(x) = +\infty$.
    Donc :

x	-1		0		$+\infty$
$f_n'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
f_n	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

2. (a) i. • Méthode 1 :
Soit $x \in [0,1]$, on a :
$$\begin{aligned}\frac{x^2}{x+1} &= \frac{x(x+1)-x}{x+1}\\ &= x - \frac{x}{x+1}\\ &= x - \frac{(x+1)-1}{x+1}\\ &= x - 1 + \frac{1}{x+1}\end{aligned}$$

Posons $a = 1$, $b = -1$ et $c = 1$, on a :

$$\forall x \in [0,1],\ \frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}.$$

- Méthode 2 :
  Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\forall x \in [0,1],\ \frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1} &\Leftrightarrow \forall x \in [0,1],\ \frac{x^2}{x+1} = \frac{ax(x+1) + b(x+1) + c}{x+1} \\
&\Leftrightarrow \forall x \in [0,1],\ x^2 = ax(x+1) + b(x+1) + c \\
&\Leftrightarrow \forall x \in [0,1],\ x^2 = ax^2 + (a+b)x + b + c \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{array} \right. \quad \text{par identification,} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Ainsi, en posant $a = 1$, $b = -1$ et $c = 1$, on a :

$$\forall x \in [0,1],\ \frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}.$$

✎ *Ici, la preuve d'existence se fait en calculant les valeurs, ce n'est pas toujours le cas.*

✎ *La méthode 1 consiste à "forcer" l'apparition des termes demandés. Elle nécessite un peu d'intuition mais est beaucoup plus simple en termes de raisonnement et de rédaction.*

✎ *Dans la méthode 2, on ne suppose pas l'existence de a, b, c (si on le supposait, on ne le prouverait pas) mais on cherche une condition pour avoir l'existence. L'étape fondamentale est l'identification. Pour faire une identification, il faut avoir une égalité de fonctions polynomiales sur une infinité de valeurs. Ainsi sans écrire "$\forall x \in [0,1]$", on ne pourra pas identifier.*

ii.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx &= \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right) dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x)\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} - 1 + \ln(2) \\
&= -\frac{1}{2} + \ln(2)
\end{aligned}$$

✎ *$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$ ne dépend pas de x, il est donc inutile de définir x.*

iii.

Par opérations, g est dérivable et, soit $x \in [0,1]$,

$$g'(x) = x\ln(1+x) + \frac{x^2}{2(1+x)}.$$

iv.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 x\ln(1+x)\,dx\\
&= \int_0^1 \left(g'(x) - \frac{x^2}{2(1+x)}\right)dx\\
&= \int_0^1 g'(x)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,dx\\
&= \left[g(x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\ln(2)\right)\\
&= g(1)-g(0)+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln(2)\\
&= \frac{1}{2}\ln(2)-0+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln(2)\\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

✎ *Cette valeur pouvait également être obtenue par intégration par parties mais cela ne se déduisait pas de la question précédente.*

(b) i.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 x^{n+1}\ln(1+x)\,dx - \int_0^1 x^n \ln(1+x)\,dx\\
&= \int_0^1 x^n(x-1)\ln(1+x)\,dx
\end{aligned}$$

Soit $x \in [0,1]$, on a : $x^n \geq 0$, $x-1 \leq 0$ et $\ln(1+x) \geq 0$ donc :

$$I_{n+1} - I_n \leq 0.$$

Ainsi $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

✎ *Pour étudier la monotonie d'une suite, on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$. A l'exception de quelques rares cas, on n'étudie pas le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ car il faut savoir que $u_n \neq 0$ et connaître son signe pour conclure.*

✎ *Dans l'intégrale, il ne faut pas définir x, mais en écrivant les inégalités, il n'y a plus d'intégrale, donc x doit être défini.*

ii.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $x \in [0,1]$, on a : $x^n \ln(1+x) \geq 0$ donc $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)\,dx \geq 0$.
Ainsi $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0 donc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

✎ *Le principal résultat permettant de prouver l'existence de limite sans calculer sa valeur est le théorème de la limite monotone.*

iii.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a déjà montré que $I_n \geq 0$.
  Soit $x \in [0,1]$, on a : $\ln(1+x) \leq \ln(2)$ et, comme $x^n \geq 0$, on a donc : $x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln(2)$.
  Ainsi : $I_n \leq \int_0^1 x^n \ln(2)\,dx$.
  Or : $\int_0^1 x^n \ln(2)\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(2)\right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{n+1}$.
  Donc :
  $$0 \leq I_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}.$$
- Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln 2}{n+1} = 0$, par théorème d'encadrement :
  $$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$$

✎ *Le théorème d'encadrement était appelé théorème des gendarmes au lycée. Il prouve à la fois l'existence de la limite et donne sa valeur.*