Chapitre 14 : Dérivabilité

Dans tout le chapitre I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

I Nombre dérivé, fonction dérivée

1.1 Dérivabilité en un point, nombre dérivé

Définition 1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soient $x, a \in I$ avec $x \neq a$. Le taux d'accroissement entre x et a est le rapport :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Remarque : Le taux d'accroissement est la pente de la sécante entre les points d'abscisses x et a.

Définition 2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est dérivable en a si et seulement si son taux d'accroissement en a :

$$\begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}$$

admet une limite finie en a. Cette limite, lorsqu'elle existe, est appelé nombre dérivée de f en a. Il est noté $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Remarque :

- Le nombre dérivée est la pente de la tangente au point d'abscisse a.
- L'équation de la tangente au point d'abscisse a est :
$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$
- Par composition des limites, on a :
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$
  Ainsi :
$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h),$$
  avec : $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.
  Il s'agit du développement limité de f à l'ordre 1 en a.

➪ **Exemple 1 :** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$, soit $f : x \mapsto x^n$. Etudier la dérivabilité de f en a.

Proposition 1

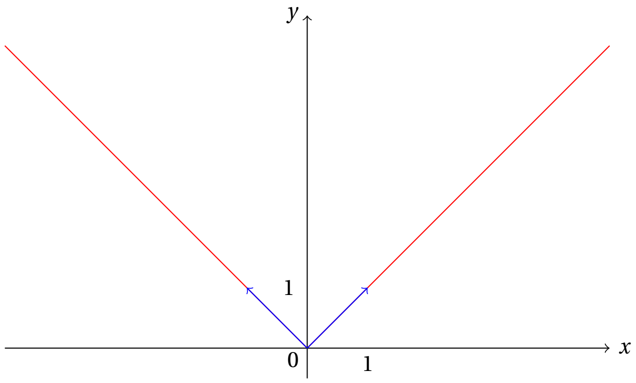
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.
Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Preuve.

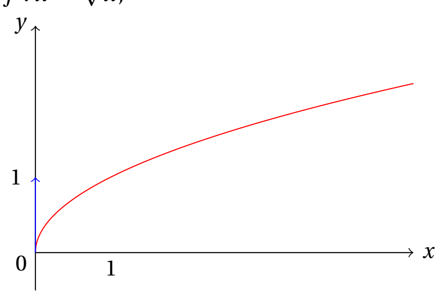
$\square$

Remarque : La réciproque est fausse :

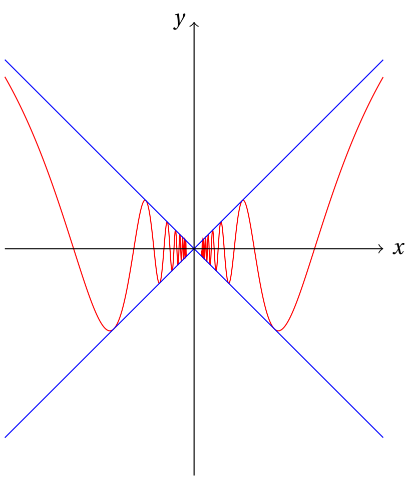
- $f : x \mapsto |x|$,



- $f : x \mapsto \sqrt{x}$,



- $f : x \mapsto \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$,



➪ **Exemple 2 :** Soit $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ f est-elle dérivable en 0 ?

1.2 Dérivabilité à gauche, à droite

Définition 3

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.
On dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) en a ssi $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie à droite (resp. à gauche) en a. Cette limite, si elle existe, est alors notée $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$) et est appelée dérivée à droite (resp. à gauche) de la fonction f en a :

$$f'_d(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ et } f'_g(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Proposition 2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$ qui n'est pas une extrémité. On a l'équivalence :

$$f \text{ est dérivable en } a \iff \begin{cases} f \text{ est dérivable à gauche en } a \\ f \text{ est dérivable à droite en } a \\ f'_g(a) = f'_d(a) \end{cases}$$

Dans ce cas, on a : $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

➪ **Exemple 3 :** Posons : $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{sinon.} \end{cases}$ Etudions la dérivabilité de f en 0.

1.3 Fonction dérivée

Définition 4

• On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I ssi f est dérivable en tout point de I. On définit alors la fonction dérivée de f notée f', par : $\begin{array}{rccc} f' : & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f'(x). \end{array}$

• On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable à droite (resp. à gauche) sur I ssi f est dérivable à droite (resp. à gauche) en tout point de I. On définit alors la fonction dérivée à droite (resp. à gauche) de f notée f'_d (resp. f'_g), par :
$\begin{array}{rccc} f'_d(\text{ resp. } f'_g) : & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f'_d(x)(\text{ resp. } f'_g(x). \end{array}$

Proposition 3

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I, elle est continue sur I.

1.4 Opérations sur les dérivées

Proposition 4

Soit f et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en $a \in I$:

- Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda f + \mu g)$ est dérivable en a et on a :
$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a).$$
- fg est dérivable en a et on a :
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$
- Si de plus, $g(a) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et on a :
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Preuve.

□

➪ **Exemple 4 :** Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{1+|x|} \end{array}$. Etudier la dérivabilité de f et calculer sa dérivée.

Proposition 5

Soient I et J deux intervalles non vides et non réduits à un point. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$. Soit $a \in I$. Si f est dérivable en $a \in I$ et si g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et on a :

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a)).$$

Preuve.

□

Théorème 1

Soient $a \in I$, $f : I \to J$ continue, bijective et dérivable en a.

$$f^{-1} : J \to I \text{ est dérivable en } b = f(a) \text{ si, et seulement si } f'(a) \neq 0$$

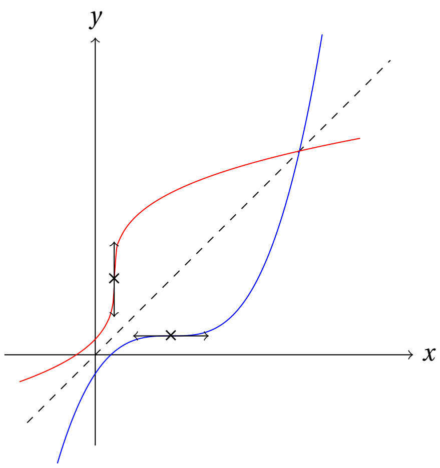
et dans ce cas :

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}$$

Preuve.

□

Remarque : L'annulation de la dérivée de f correspond à l'existence d'une tangente horizontale. Pour f^{-1}, cette tangente devient verticale, c'est pourquoi il y a un problème de non dérivabilité.



II Propriétés des fonctions dérivables

2.1 Extremum local et point critique

Définition 5

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

- On dit que f admet une maximum local en a, si et seulement si il existe un réel $r > 0$ tel que la fonction $f|_{I\cap]a-r,a+r[}$ admette un maximum en a, i.e :

$$\forall x \in I\cap]a-r, a+r[,\ f(x) \leq f(a)$$

- On dit que f admet une minimum local en a, si et seulement si il existe un réel $r > 0$ tel que la fonction $f|_{I\cap]a-r,a+r[}$ admette un minimum en a, i.e :

$$\forall x \in I\cap]a-r, a+r[,\ f(a) \leq f(x)$$

- On dit que f admet un extremum local en a, si et seulement si f admet un maximum local en a ou un minimum local en a.

Définition 6

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.
On dit que a est un point critique de f ssi f est dérivable en a et :

$$f'(a) = 0.$$

Théorème 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si :

- $a \in I$ et a n'est pas une extrémité de I,
- la fonction f est dérivable en a,
- la fonction f admet un extremum local en a,

alors a est un point critique de f c'est-à-dire : $f'(a) = 0$.

Remarque :

- Le résultat est faux si a est une extrémité de I. Par exemple : $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ et $a = 1$.
- la réciproque est fausse. Par exemple : $x \mapsto x^3$ et $a = 0$.

Preuve.

$\square$

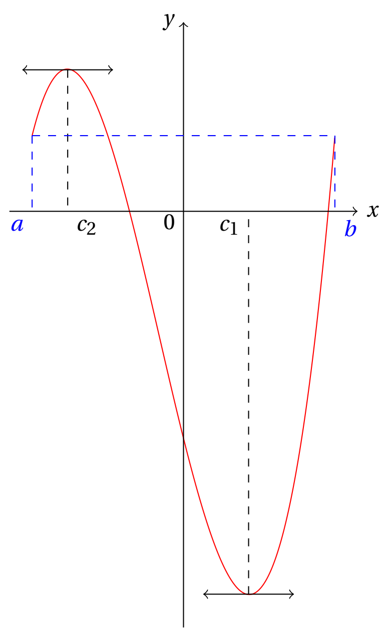
➪ **Exemple 5 :** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.
Ce résultat est le théorème de Darboux.

2.2 Théorème de Rolle

Théorème 3 : Théorème de Rolle

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarque : Le théorème de Rolle est un théorème d'existence mais pas d'unicité.



Preuve.

□

➪ **Exemple 6 :** Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. On pose :

$$\begin{array}{rccl} g : & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 2x^4 + x + f(x). \end{array}$$

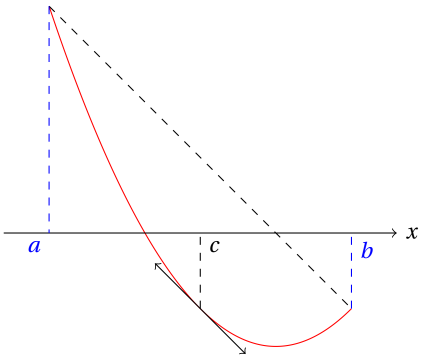
Montrer qu'il existe $c \in]-1,1[$ tel que $g'(c) = 0$.

2.3 Accroissement finis

Théorème 4 : Egalité des accroissements finis

Soient a et b deux réels avec $a < b$. Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$



Preuve.

□

➪ **Exemple 7 :** Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 0$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \exists c \in \mathbb{R}^{+*}, f(2x) = 2x f'(c).$$

Proposition 6 : Inégalité des accroissements finis

Soit f dérivable sur I. Supposons qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in I$, $m \leq f'(x) \leq M$, alors :

$$\forall x, y \in I,\ x > y,\ m(x-y) \leq f(x) - f(y) \leq M(x-y).$$

Remarque : Si f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, alors comme f' est continue sur un segment, f' est bornée. On peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis.

Preuve.

□

Définition 7

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, soit $K \geq 0$. On dit que f est K-lipschitzienne ssi :

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Corollaire 1 : Inégalité des accroissements finis

Soit f dérivable sur I. Supposons qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq M$, alors f est M-lipschitzienne :

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Preuve.

□

➪ **Exemple 8 :** Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(y)| \leq |x - y|.$$

➪ **Exemple 9 :** Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

Méthode 1

Soit $f : I \to I$ dérivable sur I. Supposons qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel que :

$$\forall x \in I, |f'(x)| \leq k.$$

Supposons que $l \in I$ soit un point fixe de f, c'est-à-dire que $f(l) = l$.
On considère la suite définie par :

$$u_0 \in I \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

Alors, en appliquant l'inégalité des accroissements finis entre u_n et l, pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)| \leq k|u_n - l|.$$

Ainsi, par récurrence, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - l| \leq k^n |u_0 - l|.$$

Comme $|k| < 1$, on a $\lim k^n = 0$ donc :

$$\lim u_n = l.$$

Remarque :

- Cette méthode permet d'étudier la convergence sans étudier la monotonie.
- L'hypothèse $\forall x \in I, |f'(x)| \leq k$ avec $k < 1$ n'est pas équivalente à $\forall x \in I, |f'(x)| < 1$.
- u_n est une valeur approchée de l à $k^n.(b - a)$ si $I = [a, b]$.
- (u_n) tend vers l à la même vitesse que la suite géométrique (k^n).

➪ **Exemple 10 :** On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{-u_n}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [\frac{1}{e}, 1].$$

Montrer que (u_n) converge. On note l sa limite. Comment obtenir une valeur approchée de l à 10^{-3} près ?

2.4 Fonctions monotones

Proposition 7

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

- f est constante sur $[a, b]$ si et seulement si $\forall x \in]a, b[$, $f'(x) = 0$.
- f est croissante sur $[a, b]$ si et seulement $\forall x \in]a, b[$, $f'(x) \geq 0$.
- f est décroissante sur $[a, b]$ si et seulement $\forall x \in]a, b[$, $f'(x) \leq 0$.

Remarque : L'hypothèse d'intervalle est fondamentale, par exemple $x \mapsto \frac{1}{x}$ a une dérivée négative sur $\mathbb{R}^*$ mais n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ et $x \mapsto \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}^*$ mais n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$.

Théorème 5

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Supposons f monotone sur $[a, b]$.
Alors f est strictement monotone sur $[a, b]$ ssi $\{x \in]a, b[, f'(x) = 0\}$ ne contient pas d'intervalle de la forme $]\alpha, \beta[$ avec $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta \in]a, b[$.

Corollaire 2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Si f' est strictement positive (resp. strictement négative), sauf éventuellement en un nombre fini de points de $]a, b[$ où f' s'annule, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante).

Remarque : Le signe de la dérivée en un point ne donne pas d'information sur la monotonie au voisinage de ce point. Par exemple, considérons la fonction définie par : $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, comme $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 + 2x \sin \frac{1}{x}$, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1 > 0$.
De plus, soit $x \neq 0$, $f'(x) = 1 + 4x \sin \frac{1}{x} - 2 \cos \frac{1}{x}$ donc $f'(x)$ est la somme d'une quantité qui tend vers 1 et d'une quantité qui oscille entre -2 et 2 au voisinage de 0 donc qui change de signe au voisinage de 0.

2.5 Théorème de la limite de la dérivée

Théorème 6 : Théorème de la limite de la dérivée

Soit $a \in I$. Soit f une fonction continue sur I et f dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Si $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = l$ avec $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$.

Corollaire 3

Soit $a \in I$. Soit f une fonction continue sur I et f dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Si $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = l$ avec $l \in \mathbb{R}$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$.

Remarque :

- La réciproque est fausse : $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$, f est dérivable en 0 et f' n'a pas de limite en 0.
- Le corollaire implique que f' est continue en a.

➪ **Exemple 11 :** Soit $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \sqrt{x} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$

➪ **Exemple 12 :** Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$:

$$xy' - 2y = (x-1)(x+1)^3.$$

III Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

3.1 Définition

Définition 8

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- On pose $f^{(0)} = f$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que la fonction $f^{(k)} : I \to \mathbb{R}$ existe et qu'elle est dérivable sur I. On note alors $f^{(k+1)}$ la dérivée de $f^{(k)}$, c'est à dire : $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$.

Si pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f^{(n)}$ existe, on dit alors que f est n fois dérivable sur I, et on appelle $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f sur I.
On dit que f est indéfiniment dérivable sur I ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n-fois dérivable sur I.

Définition 9

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I ssi f est n-fois dérivable sur I, et $f^{(n)}$ est continue sur I.
  On note $\mathcal{C}^n(I)$ ou $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$.
- On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
  On note $\mathcal{C}^\infty(I)$ ou $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

3.2 Opérations sur les fonctions $\mathcal{C}^k$

Proposition 8

Soient $k \in \mathbb{N}$, $f, g \in \mathcal{C}^k(I)$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^k(I)$ et $(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}$.

Proposition 9 : Formule de Leibniz

Soient $n \in \mathbb{N}$, $f, g \in \mathcal{C}^n(I)$. Alors $fg \in \mathcal{C}^n(I)$ et on a

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

➪ **Exemple 13 :** Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de :

$$f : x \mapsto e^{2x}(x+2).$$

Proposition 10

Soient $k \in \mathbb{N}$ et I et J deux intervalles non vides et non réduits à un point. Soient $f \in \mathcal{C}^k(I)$ et $g \in \mathcal{C}^k(J)$ telles que $f(I) \subset J$. Alors $(g \circ f) \in \mathcal{C}^k(I)$.

Preuve.

- Pour $k = 0$, soient $f \in \mathcal{C}^0(I)$ et $g \in \mathcal{C}^0(J)$ telles que $f(I) \subset J$. Alors, par continuité de la composée d'applications continues, on a : $(g \circ f) \in \mathcal{C}^0(I)$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons le résultat vrai pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.
  Soient $f \in \mathcal{C}^{k+1}(I)$ et $g \in \mathcal{C}^{k+1}(J)$ telles que $f(I) \subset J$.
  Alors f et g sont dérivables, donc $g \circ f$ est dérivable et :$(g \circ f)' = f'.g' \circ f$.
  Or $g' \in \mathcal{C}^k(J)$ et $f \in \mathcal{C}^k(I)$ donc, par hypothèse de récurrence : $(g' \circ f) \in \mathcal{C}^k(I)$.
  De plus, $f' \in \mathcal{C}^k(I)$, donc par produit :
  $$(g \circ f)' = f'.g' \circ f \in \mathcal{C}^k(I).$$
  Ainsi : $(g \circ f) \in \mathcal{C}^{k+1}(I)$.
- D'où la preuve par récurrence.

□

Proposition 11

Soit $k \in \mathbb{N}$. Soient $f, g \in \mathcal{C}^k(I)$. Si g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g} \in \mathcal{C}^k(I)$.

Preuve.

- Posons $h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$, on a : $h \in \mathcal{C}^k(R^*)$. De plus, $g \in \mathcal{C}^k(I)$ et, comme g ne n'annule pas sur I, $g(I) \subset \mathbb{R}^*$, donc, d'après la proposition précédente :
$$h \circ g = \frac{1}{g} \in \mathcal{C}^k(I).$$
- $f \in \mathcal{C}^k(I)$ et $\frac{1}{g} \in \mathcal{C}^k(I)$ donc, par produit :
$$\frac{f}{g} \in \mathcal{C}^k(I).$$

□

➪ **Exemple 14 :** Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de :
$$f : x \mapsto \frac{1}{1-x}.$$

Proposition 12

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : I \to J$ une bijection de classe $\mathcal{C}^k$. Alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J si et seulement si f' ne s'annule pas sur I.

Remarque : Il n'y a pas besoin d'hypothèse de non annulation de $f'', f''', \dots$.

Preuve.

- Pour $k = 1$, soit $f : I \to J$ est bijective, de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
On sait que f^{-1} est dérivable sur J ssi f' ne s'annule pas sur I. De plus, dans ce cas :
$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$
Or f' est continue et ne s'annule pas sur I, et f^{-1} continue (car dérivable), donc $(f^{-1})'$ est continue comme quotient et composée de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas. Ainsi f^{-1} est $\mathcal{C}^1$sur J.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons le résultat vrai pour les fonctions $\mathcal{C}^k$.
Soit $f : I \to J$ est bijective, de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur I.
Alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J ssi f' ne s'annule pas sur I. De plus, dans ce cas :
$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$
Or f' est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et ne s'annule pas sur I, et f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J, donc $(f^{-1})'$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J comme quotient et composée de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas. Ainsi f^{-1} est $\mathcal{C}^{k+1}$sur J.
- D'où la preuve par récurrence.

□

IV Fonctions convexes

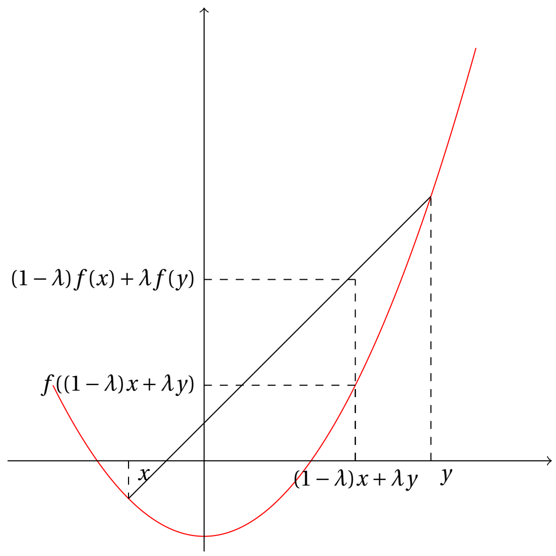
4.1 Généralités

Définition 10

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est convexe ssi :
$$\forall x, y \in I,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y).$$

Remarque : Si $x < y$, on a : $\{(1-\lambda)x + \lambda y,\ \lambda \in [0,1]\} = [x, y]$ (paramétrage d'un segment).
En effet :

- soit $\lambda \in [0,1]$, $(1-\lambda)x + \lambda y = x + \lambda(y - x) \in [x, x + (y - x)] = [x, y]$,
- soit $z \in [x, y]$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :
$$z = (1-\lambda)x + \lambda y \Leftrightarrow \lambda = \frac{z-x}{y-x}.$$
Posons $\lambda = \frac{z-x}{y-x}$. On a $z = (1-\lambda)x + \lambda y$ et comme $z \in [x, y]$, $\lambda \in [0,1]$ donc λ convient.



➪ **Exemple 15 :** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto |x|$. Montrer que f est convexe.

Proposition 13

Soit $f:I\to\mathbb{R}$ convexe.
Pour tout $a\in I$ la fonction $x\mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I\setminus\{a\}$.

Proposition 14

Soit $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction convexe.
Pour tous $x,y\in I$, la courbe représentative de f sur $[x,y]$ est en-dessous de sa sécante sur $[x,y]$, c'est-à-dire :

$$\forall x,y\in I, x<y, \forall t\in[x,y],\ f(t)\leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y}(t-x)+f(x).$$

Pour tous $x,y\in I$, la courbe représentative de f en dehors de $[x,y]$ est au-dessus de sa sécante en dehors de $[x,y]$, c'est-à-dire :

$$\forall x,y\in I, x<y, \forall t\notin[x,y],\ f(t)\geq \frac{f(x)-f(y)}{x-y}(t-x)+f(x).$$

➪ **Exemple 16 :** Toute fonction convexe sur un intervalle ouvert est continue.

4.2 Convexité et fonctions dérivables

Proposition 15

Soit $f:I\to\mathbb{R}$ dérivable.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est convexe,

(ii) f' est croissante sur I,

(iii) la courbe représentative de f est située au-dessus de ses tangentes, c'est-à-dire :

$$\forall x,a\in I,\ f(x)\geq f'(a)(x-a)+f(a).$$

Remarque : Une fonction convexe n'est pas toujours dérivable. Par exemple : $f:x\mapsto|x|$ est convexe mais non dérivable en 0.

Corollaire 4

Soit $f:I\to\mathbb{R}$ deux fois dérivable.
f est convexe ssi $f''\geq 0$ sur I.

➪ **Exemple 17 :**

1. Soit $f:\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto -\ln x$. f est convexe.
2. Montrer que : $\forall x\in]0,+\infty[$, $\ln(x)\leq x-1$

➪ **Exemple 18 :**

1. La fonction $-\sin$ est convexe sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
2. Montrer que : $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2x}{\pi}\leq \sin x\leq x$.

V Fonctions complexes

5.1 Généralités

Définition 11

- On dit que $f:I\to\mathbb{C}$ est dérivable en $a\in I$ ssi son taux d'accroissement en a :

$$\begin{array}{ccc} I\setminus\{a\} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$$

  admet une limite (finie) quand x tend vers a. On appelle alors dérivée de f en a et on note $f'(a)$ cette limite.
- On dit que f est dérivable sur I ssi f est dérivable en tout point de I.

Proposition 16

Soit $f:I\to\mathbb{C}$ et $a\in I$. f est dérivable en a si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables en a, et on a alors :

$$f'(a)=\mathrm{Re}(f)'(a)+i\mathrm{Im}(f)'(a).$$

Remarque :

- Les résultats d'opérations sur les dérivées, dont la formule de Leibnitz, restent valables pour les fonctions à valeurs complexes.
- Les résultats sur la monotonie et sur les extremums n'ont plus de sens pour les fonctions à valeurs complexes.

5.2 Inégalité des accroissements finis

Proposition 17 : Inégalité des accroissements finis

Soit $f:I\to\mathbb{C}$ dérivable sur I. Supposons qu'il existe $M\in\mathbb{R}$ tels que pour tout $x\in I$, $|f'(x)|\leq M$, alors :

$$\forall x,y\in I, |f(x)-f(y)|\leq M|x-y|.$$

Remarque : Le théorème de Rolle est faux pour les fonctions à valeurs complexes, par exemple : $f:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$, $x\mapsto e^{ix}$. Il en est de même pour l'égalité des accroissements finis. Cependant, l'inégalité des accroissements finis est vraie.

Preuve.

□