

## I Limite d'une fonction en un point

### Exercice 1 :

Etudier les limites suivantes :

1.  $\frac{x^3 + x^2 + 5}{5x^3 - x + 2}$  en  $+\infty$ ,
2.  $\sqrt{x^2 + 2x} - x$  en  $+\infty$ ,
3.  $\frac{\tan 5x}{\sin x}$  en 0,
4.  $\frac{e^{3x} + 2x + 7}{e^x + e^{-x}}$  en  $+\infty$ ,
5.  $\left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$  en  $+\infty$ .

### Exercice 2 :

Etudier les limites suivantes :

1.  $\frac{x^2 + 1}{\sin^2 x}$  en 0,
2.  $\frac{\sin x - \sin 5x}{\sin x + \sin 5x}$  en 0,
3.  $\frac{\tan x - \sin x}{x^3}$  en 0,
4.  $\frac{\sin \frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$  en 0,
5.  $\frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2 - a^2}$  en  $a \neq 0$ .

### Exercice 3 : (★)

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  périodique telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$  où  $a \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  est constante.

### Exercice 4 : (★★)

On considère la fonction :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{(-1)^{\lfloor 1/x \rfloor}}{x} \end{array} .$$

Montrer que  $f$  n'admet pas de limite finie en 0.

A-t-on  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \pm\infty$ ?

### Exercice 5 : On pose :

$$f : x \mapsto x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor .$$

Etudier la limite de  $f$  en :

- |                    |                    |
|--------------------|--------------------|
| 1. 0,              | 4. $\frac{2}{3}$ , |
| 2. 2,              | 5. $+\infty$ .     |
| 3. $\frac{1}{2}$ , |                    |

### Exercice 6 :

Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x + \lfloor x \rfloor}$$

### Exercice 7 : (★)

Déterminer si elle existe, la limite en  $a$  de  $f$  fonction définie sur  $I$  où :

1.  $I = \mathbb{R}^*$ ,  $f(x) = \sin x \cos \frac{1}{x}$ ,  $a = 0$ ,
2.  $I = \mathbb{R}^*$ ,  $f(x) = \cos x \sin \frac{1}{x}$ ,  $a = 0$ ,
3.  $I = [0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $f(x) = \cos x + \lfloor \tan x \rfloor$ ,  $a = \frac{\pi}{2}$ ,
4.  $I = [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ ,  $f(x) = \cos x + \lfloor \tan x \rfloor$ ,  $a = \frac{\pi}{2}$ .

## II Continuité en un point

### Exercice 8 :

Etudier la continuité des applications définies par :

1.  $f(x) = x - \lfloor x \rfloor - (x - \lfloor x \rfloor)^2$ ,
2.  $f(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor} (x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2})$ ,
3.  $f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} .$
4.  $f(x) = \begin{cases} \frac{\exp(\text{Arctan } x) - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} .$

**Exercice 9 : (★)**

Déterminer si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité en 0 :

- |   |  |                                   |
|---|--|-----------------------------------|
| 1. $f(x) = x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ , |  | 4. $f(x) = (1+x)^{1/x}$ ,         |
| 2. $f(x) = \frac{ x }{x}$ ,                 |  | 5. $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$ ,   |
| 3. $f(x) = \exp(\frac{1}{x})$ ,             |  | 6. $f(x) = x \cos(\frac{1}{x})$ . |

**Exercice 10 : (★)**

Trouver toutes les applications  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continues en 0 telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(3x) = f(x).$$

**Exercice 11 : (★★)** ✨

- Montrer que si  $f$  et  $g$  sont continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et coïncident sur  $\mathbb{Q}$ , alors  $f = g$  sur  $\mathbb{R}$ .
- Soient  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continues telles que  $\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) < g(x)$ .
  - Montrer que  $f \leq g$ .
  - Montrer qu'on n'a pas nécessairement :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < g(x)$ .

### III Continuité sur un intervalle

**Exercice 12 :** 📖

Montrer que l'équation  $x^{17} = x^{11} + 1$  admet au moins une solution  $x \in \mathbb{R}^+$ .

**Exercice 13 : (★)** ✨

Soient  $f, g \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  telles que  $f(0) = g(1) = 0$  et  $f(1) = g(0) = 1$ . Montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \exists x \in [0, 1], f(x) = \lambda g(x).$$

**Exercice 14 : (★)**

Soient  $a < b$  et soit  $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ . Montrer qu'il existe  $c \in [a, b]$  tel que :

$$f(a) - 2f(c) + f(b) = 0.$$

**Exercice 15 : (★)** ✨

Déterminer toutes les fonctions  $f$  continues sur  $\mathbb{R}$  telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x)^2 = f(x)$$

**Exercice 16 : (★)**

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0, 1]$  telle que  $f(0) = f(1)$ . Montrer qu'il existe  $c \in [0, \frac{1}{2}]$  tel que :

$$f(c) = f\left(c + \frac{1}{2}\right).$$

**Exercice 17 : (★★)**

Soit  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  continue. On suppose que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = l < 1.$$

Montrer qu'il existe  $c \in \mathbb{R}^+$  tel que :

$$f(c) = c.$$

**Exercice 18 : (★★)** ! ✨

Soit  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  telle que  $f(0) = f(1)$ . Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x \in [0, 1], f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x).$$

**Exercice 19 : (★★)**

Soient  $a < b$ , soient  $f, g: [a, b] \rightarrow [a, b]$  des fonctions continues telles que  $f \circ g = g \circ f$ . Montrer qu'il existe  $x_0 \in [a, b]$  tel que  $f(x_0) = g(x_0)$ .

**Exercice 20 : (★★)** ✨

Soit  $f$  une application de d'intervalle  $I$  dans  $\mathbb{R}$  continue et injective.

Montrer que  $f$  est monotone.

**Exercice 21 : (★)**

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , bornée sur  $\mathbb{R}$  et  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $g \circ f$  et  $f \circ g$  sont bornées sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 22 : (★★)**

Soit  $f: \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer que  $f$  admet un minimum sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

**Exercice 23 : (★)** ✨

Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  telle que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \in \mathbb{R} \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}.$$

Montrer que  $f$  est bornée.

**Exercice 24 : (★★)**

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Montrer que :

$$\sup_{x \in ]a, b[} f(x) = \sup_{x \in [a, b]} f(x) \text{ et } \inf_{x \in ]a, b[} f(x) = \inf_{x \in [a, b]} f(x).$$

**Exercice 25 : (★★)** ✨

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues de  $[-1, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ .

On définit pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la fonction  $M(x) = \sup_{t \in [-1, 1]} (f(t) + xg(t))$

1. Montrer que  $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est bien définie.
2. Montrer que :

$$\forall h > 0, \forall x \in \mathbb{R}, M(x+h) \leq M(x) + h \sup_{t \in [-1, 1]} g \text{ et } M(x+h) \geq M(x) + h \inf_{t \in [-1, 1]} g.$$

3. Montrer qu'il existe  $K \geq 0$  tel que : pour tout  $(a, x) \in \mathbb{R}^2$ ,  $|M(x) - M(a)| \leq K|x - a|$ . En déduire que  $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue.

**Exercice 26 : (★)**

On considère la fonction suivante :

$$f : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}.$$

1. Montrer que  $f$  est bijective.

2. Déterminer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-1}(2^{-n}).$$

**Exercice 27 : (★)** !!

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$ .

1. Comparer  $f(\frac{1}{x})$  et  $f(x)$ .
2. On désigne par  $\varphi$  la restriction de  $f$  à  $] -1, 1[$ . Montrer que  $\varphi$  est une bijection de  $] -1, 1[$  dans  $\mathbb{R}$ .
3. Déterminer la fonction  $\varphi^{-1} \circ f$ .

**Exercice 28 : (★★)** ✨

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x+1 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Montrer que  $f$  est bijective et discontinue en tout point de  $\mathbb{R}$ .