PCSI 1 — 2024/2025

Exercices du chapitre 2 : Etude de fonctions, fonctions logarithmes, exponentielle et puissances

I Continuité

II Dérivation

Exercice 1 :
Etudier la dérivabilité et calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \frac{x}{x^2-3x+2}, \qquad f_2 : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{2-x}}, \quad f_3 : x \mapsto \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}.$$

Exercice 2 :
Etudier et représenter la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2-2}{(x-1)^2}.$$

Exercice 3 : ($\star$)
Etudier et représenter la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{2-x}}.$$

Exercice 4 : ($\star$)
Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2+x+1}{(x-1)^3}$ est décroissante sur l'intervalle $]-\infty,1[$ et qu'elle est décroissante sur l'intervalle $]1,+\infty[$.
Est-elle décroissante sur son ensemble de définition ?

Exercice 5 : ($\star$)
Montrer que :

$$\forall x \in [-1,1],\ 2x\sqrt{1-x^2} \in [-1,1].$$

Exercice 6 : ($\star$)
Montrer que :

$$\forall x \in [-2,2],\ -4 \leq x^4 - x^2 - 2x - 2 \leq 14.$$

III Bijectivité

Exercice 7 :
On pose $\begin{array}{rccc} f: &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x^2} + 5 \end{array}$.
Montrer que f est bijective de $]0,+\infty[$ vers un intervalle que l'on précisera.

Exercice 8 : ($\star$)
On pose $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}\setminus\{2\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ & x & \mapsto & \frac{x+1}{x-2} \end{array}$.
Montrer que f est une bijection et déterminer f^{-1}.

Exercice 9 : ($\star$)

1. On pose $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{x^2-1}{x^2+1} \end{array}$.
   f est-elle bijective ?
2. On pose $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^+ & \to & [-1,1[\\ & x & \mapsto & \frac{x^2-1}{x^2+1} \end{array}$.
   Montrer que g est bijective et calculer g^{-1}.

Exercice 10 :
Pour $t \in]0,1]$, on définit :

$$f(t) = \frac{1-t^3}{t}.$$

1. Calculer $f'(t)$, et montrer que f définit une bijection de $]0,1]$ vers $[0,+\infty[$.
2. On note g la bijection réciproque de f.
   Montrer que g est dérivable sur un ensemble que l'on précisera et calculer g' en fonction de g.

Exercice 11 : ($\star$)
On considère $f : x \mapsto 1 - x^2 e^x$.

1. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^+$ vers $]-\infty,1]$.
   On considèrera dans la suite que $f : \mathbb{R}^+ \to]-\infty,1]$.
2. Sur quel(s) intervalle(s) f^{-1} est-elle dérivable ?

3. Déterminer $\left(f^{-1}\right)'(1-e)$.

Exercice 12 : (⋆)
Etudier la dérivabilité et calculer la dérivée de :

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^3}}.$$

IV Fonctions logarithmes, exponentielle, puissances

Exercice 13 :
Etudier la dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \sqrt{\ln x}$,
2. $x \mapsto \left(\frac{x}{\ln x}\right)^2$,
3. $x \mapsto \ln(\ln x)$,
4. $x \mapsto \dfrac{e^x+2}{e^x+1}$,
5. $x \mapsto xe^{-2x}$,
6. $x \mapsto \left(\dfrac{e^x}{x+1}\right)^2$,

Exercice 14 : (⋆)
Résoudre l'inéquation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\ln(x-1) + \ln(x+1) < 2\ln(x) - 1.$$

Exercice 15 : (⋆)
Soit $f : x \mapsto \ln(e^x+1)$. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 16 :
Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to1^+} \ln(x)\ln(\ln(x))$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{2x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{e^x-1}$

Exercice 17 : (⋆)
Etudier et tracer les fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{1+\ln(x)}{x^2}$
2. $x \mapsto \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

Exercice 18 : (⋆)
On considère les fonctions définies par :

$$f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x - \ln x \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^x - 1 \end{array}.$$

1. Montrer que :
$$\exists! \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha e^{\alpha} = 1.$$
2. Etudier le signe de g.
3. Etudier les variations de f.
4. Montrer que f admet un mininum égal à $\alpha + \frac{1}{\alpha}$.

Exercice 19 : (⋆⋆)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a \leq b$. On pose :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)} \end{array}.$$

Etudier la monotonie de f et en déduire que :

$$\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leq (\ln 2)^2.$$

Exercice 20 : (⋆)
Etudier la fonction :

$$f : x \mapsto (1+\frac{1}{x})^x.$$

Exercice 21 : (⋆) Etudier la fonction :

$$f : x \mapsto x^{\frac{x}{x-1}}.$$