PCSI 1 — 2024/2025

Exercices du chapitre 6 : Calcul algébrique

I Sommes

Exercice 1 :
Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} x_k = n(n+2).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer les valeurs de :

1. $S_1 = \sum_{k=0}^{6} x_k$,
2. $S_2 = \sum_{k=0}^{n+1} x_k$,
3. $S_3 = \sum_{k=0}^{2n} x_k$,
4. $S_4 = \sum_{k=0}^{n} 2x_k$,
5. $S_5 = \sum_{k=n+1}^{2n} x_k$.

Exercice 2 : (⋆)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k.$$

Exercice 3 : (⋆)
Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$\sum_{n=0}^{N} n^3.$$

Exercice 4 :
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$\sum_{q=0}^{n} \sum_{p=0}^{q} \sum_{k=0}^{p} 2^k.$$

Exercice 5 : (⋆⋆)
Soit $n \geq 2$.

a. Simplifier l'expression :

$$\sum_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right).$$

b. Utiliser une méthode analogue pour en déduire une expression plus simple de :

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{2p+1}{(p^2+p)^2}.$$

Exercice 6 : (⋆)

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

2. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Etudier la convergence de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 7 : (⋆⋆) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor \text{ et } \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor.$$

Exercice 8 : (⋆⋆)
Montrer que si la suite (u_n) est monotone, alors la suite de terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k,$$

est monotone de même sens que (u_n).

Exercice 9 :
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}\ \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n \sin(nx)}{n+k^2} \right| \leq 1.$$

Exercice 10 : (⋆⋆)
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left(\sin \frac{\pi}{6k}\right)^k\right| \leq 1.$$

II Produits

Exercice 11 :
Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer :

$$\prod_{k=0}^{n} 2^k.$$

Exercice 12 : (⋆)
Montrer que :

a. $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)! \geq \sum_{k=1}^{n} k!,$

b. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k.k! = (n+1)! - 1.$

Exercice 13 : (⋆)
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^{n-1} \leq n! \leq n^n.$$

Exercice 14 : (⋆⋆)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels strictement positifs.
On définit la suite des moyennes arithmétiques par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

On définit la suite des moyennes géométriques par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, G_n = \left(\prod_{k=1}^{n} u_k\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Le but de cet exercice est de montrer l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, G_n \leq A_n.$$

1. Montrer que :
$$\forall x > 0, \ln(x) \leq x - 1.$$
2. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln\left(\prod_{k=1}^{n} u_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(u_k)$$
3. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, G_n \leq A_n.$$
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans quel cas a-t-on $A_n = G_n$?

Exercice 15 : (⋆⋆)
Soit $n \geq 2$. Simplifier l'expression :

$$\prod_{p=1}^{n} \frac{(2p+1)(2p-1)}{(2p+3)(2p+5)}.$$

Exercice 16 : (⋆⋆)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $a_1, \dots, a_n \in [1, +\infty[$. Montrer que :

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + a_i) \leq 2^{n-1}(1 + \prod_{i=1}^{n} a_i).$$

Exercice 17 : (⋆⋆)

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
$$\operatorname{ch} x = \frac{\operatorname{sh} 2x}{2\operatorname{sh} x}.$$
2. Simplifier :
$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch} \frac{x}{2^k}.$$
3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

III Sommes doubles

Exercice 18 :
Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer :

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} 2^{2i-j}.$$

Exercice 19 :
Soit $n \in \mathbb{N}$. vérifier que :

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k} 2^k,$$

et en déduire la valeur de :

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k.$$

Exercice 20 : (⋆⋆)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$\sum_{i,j\in[\![1,n]\!]} \max(i,j),$$

où $\max(i,j)$ désigne le maximum de i et j, c'est-à-dire : $\max(i,j)=j$ si $i \leq j$ et $\max(i,j)=i$ sinon.

IV Coefficients binomiaux et formule du binôme de Newton

Exercice 21 : (⋆)
Déterminer tous les $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ avec $p < n$ tels que :

$$\begin{cases} \binom{n}{p} = \binom{n}{p+1} \\ 4\binom{n}{p} = 5\binom{n}{p-1} \end{cases}$$

Exercice 22 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}}.$$

Exercice 23 : (⋆⋆)
On considère la suite définie par :

$$S_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}S_k.$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n \leq n!.$$

Exercice 24 : (⋆)
Soient $n, p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \geq nq+1$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{p-k}{q} = \binom{p+1}{q+1} - \binom{p-n}{q+1}.$$

Exercice 25 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k+1}.$$

Exercice 26 :
Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer :

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}.$$

Exercice 27 : (⋆⋆)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$.
Calculer :

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{2k} \text{ et } \sum_{k=0}^{p-1}\binom{n}{2k+1}$$

Exercice 28 : (⋆ ⋆ ⋆)
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 4^n(n!)^3 < (n+1)^{3n}.$$