



## I Calcul de primitives

**Exercice 1 :**  

Déterminer une primitive de :

1.  $f_1 : x \mapsto \frac{2x-3}{(x^2-3x+10)^4}$ ,
2.  $f_2 : x \mapsto xe^{x^2}$ ,
3.  $f_3 : x \mapsto \frac{\text{Arctan } x}{1+x^2}$ ,
4.  $f_4 : x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$ ,
5.  $f_5 : x \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$ ,
6.  $f_6 : x \mapsto \frac{(\ln(3x+6))^3}{x+2}$ ,
7.  $f_7 : x \mapsto \frac{2x-5}{(x^2-5x+9)^4}$ .

**Exercice 2 :** 

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}}.$$

En déduire une primitive sur  $\mathbb{R}$  de :

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

**Exercice 3 :** 

Déterminer une primitive sur  $\mathbb{R}$  de :

$$f : x \mapsto \sin^3 x.$$

**Exercice 4 : (★★)**

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\tan\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

En déduire une primitive de :

$$x \mapsto \frac{1}{\sin x} \text{ et } x \mapsto \frac{1}{\cos x}.$$



**Exercice 5 :**

Déterminer une primitive de :

$$x \mapsto e^{2x} \cos(3x).$$



**Exercice 6 :**

Calculer les intégrales suivantes :

1.  $\int_0^\pi \cos(3x) dx$ ,
2.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 5 \cos x \sin^2 x dx$ ,
3.  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$ ,
4.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1 + \sin x)^3} dx$ ,
5.  $\int_0^\pi \sin^2 x dx$ ,
6.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2 + \cos x} dx$ .

**Exercice 7 : (★)**

1. Calculer :  $\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x} dx$ ,
2. Calculer :  $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\text{Arcsin } x}{1-x^2}} dx$ .



**Exercice 8 :**

a. Déterminer une primitive sur  $] -2, +\infty[$  de :

$$x \mapsto \frac{\ln^3(2x+4)}{x+2}.$$

b. Déterminer une primitive sur  $\mathbb{R}$  de :

$$x \mapsto \frac{x}{\sqrt{3x^2+2}}.$$

**Exercice 9 : (★)**

1. Déterminer  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, \frac{2x^2-3x-4}{x-2} = ax + b + \frac{c}{x-2}.$$

2. En déduire la valeur de :

$$\int_0^1 \frac{2x^2 - 3x - 4}{x - 2} dx.$$

**Exercice 10 :** (★★) ✨

Soit  $f \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$  telle que  $f(0) = 0$  et :  $\forall x \in [0, +\infty[, 0 \leq f'(x) \leq 1$ . Montrer que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \left(\int_0^x f\right)^2 \geq \int_0^x f^3.$$

## II Intégration par parties et changement de variable

**Exercice 11 :** ✨

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1.  $x \mapsto \text{Arcsin } x$  sur  $] -1, 1[$
2.  $x \mapsto \frac{x}{\cos^2 x}$ .

**Exercice 12 :** (★)

Calculer les intégrales suivantes :

1.  $\int_0^1 t \text{Arctan}(t) dt$
2.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t) \sin^4(t) dt$

**Exercice 13 :** (★) ✨

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1.  $x \mapsto \text{Arctan } x$ ,
2.  $x \mapsto \sin(\ln x)$ .

**Exercice 14 :** ✨

Déterminer une primitive de :

$$x \mapsto (x^3 + 4x^2 - 2x + 7)e^{2x}.$$

**Exercice 15 :** (★)

Déterminer une primitive de :

$$x \mapsto x^3 \cos x \text{ et } x \mapsto x^3 \sin x.$$

**Exercice 16 :** (★) ✨

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

1.  $x \mapsto x^2 \sin^3 x$
2.  $x \mapsto (x^2 - x + 3) \sin x$
3.  $x \mapsto (x^2 + 1)e^x \cos x$
4.  $x \mapsto (x \text{sh } x)^2$

**Exercice 17 :** (★)

On considère la suite  $(I_n)$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x dx.$$

Etablir une formule de récurrence.

**Exercice 18 :** (★★) ✨

On considère la suite  $(I_n)$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x dx.$$

En utilisant la formule de récurrence établie dans l'exercice précédent, écrire, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $I_{2p}$  et  $I_{2p+1}$  sous forme de sommes.

**Exercice 19 :** ✨

Calculer :

$$\int_0^1 \frac{x^4}{x^{10} + 1} dx.$$

**Exercice 20 :** ✨

Déterminer une primitive de :

$$x \mapsto \frac{e^{2x}}{1 + e^x}.$$

**Exercice 21 :** (★) ✨

Calculer les primitives de :

1.  $x \mapsto \frac{x^7}{(x^4 + 1)^2}$ ,
2.  $x \mapsto \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ ,
3.  $x \mapsto \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$ ,
4.  $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ .


**Exercice 22 :** (★) Calculer une primitive de :

- $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ , en effectuant le changement de variable  $t = \sqrt{x^2-1}$ ,
- $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}$ , en effectuant le changement de variable  $t = \sqrt{e^x-1}$ .

**Exercice 23 :** 

Soit  $a > 0$ . Calculer une primitive de :

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \text{ et } x \mapsto \frac{1}{a^2+x^2}.$$

**Exercice 24 :** (★) 

Soit  $f$  définie par :


$$f(x) = \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{1-t^2}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}} dt.$$

- Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
- Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $f(x) = f(\frac{1}{x})$ .
- En déduire que  $f$  est identiquement nulle.

**Exercice 25 :** (★★) On pose :

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^x \frac{1}{1+\cos^2 t} dt.$$

- Montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
- Soit  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , calculer  $F(x)$  en effectuant le changement de variable  $t = \text{Arctan}(u)$ .
- En déduire la valeur de  $F(\frac{\pi}{2})$ .

**Exercice 26 :** (★★) 

Déterminer une primitive sur  $] -1, 1[$  de :

$$x \mapsto (\text{Arcsin } x)^2.$$

### III Fractions rationnelles

**Exercice 27 :** 


Déterminer une primitive de :

$$x \mapsto \frac{1}{x^2-3x+2}$$

**Exercice 28 :** 

Déterminer une primitive de :

$$x \mapsto \frac{1}{9x^2+6x+5}$$

**Exercice 29 :** (★) 

Déterminer une primitive de :

- $f_1: x \mapsto \frac{1}{x^2-5x+6}$ ,
- $f_2: x \mapsto \frac{1}{x^2+2x+1}$ ,
- $f_3: x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1}$ .

**Exercice 30 :** (★★)


Calculer les primitives de :

$$x \mapsto \frac{x}{x^4-x^2-2}.$$

**Exercice 31 :** (★)

Calculer les primitives des fonctions rationnelles suivantes :

- $x \mapsto \frac{x^3+2x}{x^2+x+1}$
- $x \mapsto \frac{2x-1}{(x+1)^2}$
- $x \mapsto \frac{2x}{x^2-x+1}$

**Exercice 32 :** (★) 

Déterminer une primitive de :

$$x \mapsto \frac{x}{x^2-x+1}.$$

**Exercice 33 :** (★★)

Montrer que :

$$\exists a, b, c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \frac{1}{x^3+1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}.$$

En déduire les primitives de :

$$x \mapsto \frac{1}{x^3+1}.$$