Indications du chapitre 11 : Suites numériques

I Limite d'une suite réelle

Exercice 1 : (⋆⋆⋆)

1. Montrer et utiliser que, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $f^{-1}(\llbracket 0, N-1 \rrbracket)$ est fini et admet un plus grand élément.
2. Montrer et utiliser que, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $f(\llbracket 0, N-1 \rrbracket)$ est fini et admet un plus grand élément.
3. Utiliser les questions précédentes.

Exercice 2 :

Utiliser la quantité conjuguée.
Solution : $\frac{a+b}{2}$

Exercice 3 :

1. Utiliser la quantité conjuguée.
   Solution : 1
2. Utiliser la quantité conjuguée.
   Solution : 0
3. Utiliser la quantité conjuguée.
   Solution : -1

Exercice 4 : (⋆)

1. *Solution :* 0
2. Faire des cas selon la position relative de a et b.
   Solution : 0 *si* $a = b$, -1 *si* $b > a$, 1 *si* $a > b$
3. Factoriser par le terme dominant.
   Solution : $\frac{1}{5}$
4. Factoriser par le terme dominant.
   Solution : $\frac{2}{5}$
5. Utiliser la quantité conjuguée.
   Solution : 0

Exercice 5 :

1. Utiliser l'exponentielle et le logarithme.
   Solution : e
2. Utiliser l'exponentielle et le logarithme.
   Solution : 1
3. Utiliser l'exponentielle et le logarithme.
   Solution : 1
4. Utiliser l'exponentielle et le logarithme.
   Solution : e^{-1}

Exercice 6 : (⋆)

1. Utiliser une majoration de (u_n) à partir d'un certain rang.
2. Utiliser une minoration de (u_n) à partir d'un certain rang.
3. *Solution :* $\lim u_n = e$ *et* $\lim \sqrt[n]{u_n} = 1$.

Exercice 7 : (⋆)

1. Etudier les cas $x \leq y$ et $x > y$.
2. *Solution :* $\lim x_n = \sup(\lim u_n, \lim v_n)$, $\lim y_n = \inf(\lim u_n, \lim v_n)$

Exercice 8 :

Montrer que $0 \leq a - u_n \leq (a+b) - (u_n + v_n)$ et utiliser le théorème d'encadrement.

Exercice 9 :

1. Utiliser des inégalités.
   Solution : 1
2. Utiliser des inégalités.
   Solution : $\frac{x}{2}$

Exercice 10 : (⋆)

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.
Solution : $\lim u_n = 1$

Exercice 11 : (⋆)

Remarquer que, pour $1 \leq k \leq n-2$, $k! \leq (n-2)!$ et utiliser le théorème d'encadrement.
Solution : $\lim u_n = 1$

Exercice 12 : (⋆⋆)

Remarquer que $2nu_{n+1} \leq n(u_n + u_{n+1}) \leq 2nu_n$ et utiliser le théorème d'encadrement.

II Suites monotones

Exercice 13 : (⋆⋆)

1. Remarquer que $\sup B$ est un majorant de A.
2. Remarquer que $\max(\sup A, \sup B)$ est un majorant de $A \cup B$. Pour calculer $\sup(A \cup B)$, remarquer que $A \subset A \cup B$.
   Solution : $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.
3. Remarquer que $\min(\sup A, \sup B)$ est un majorant de $A \cap B$. On peut avoir $A \cap B = \emptyset$ donc $\sup(A \cap B)$ n'existe pas toujours.

Exercice 14 : (⋆⋆)
Commencer par déterminer intuitivement les bornes supérieures et inférieures.

1. *Solution :* $\inf(A) = -1$, $\sup(B) = 1$
2. *Solution :* $\inf(B) = -1$, $\sup(C) = 1$

Exercice 15 : (⋆⋆)
Soient $x, y \in A$, montrer que $|x - y| \leq \sup A - \inf A$, ainsi $d(A) \leq \sup A - \inf A$.
Soit $\varepsilon > 0$, comme $\sup A - \varepsilon < \sup A$, il existe $x \in A$ tel que $x \geq \sup A - \varepsilon$ et comme $\inf A + \varepsilon > \inf A$, il existe $y \in A$ tel que $y \leq \inf A + \varepsilon$, calculer $|x - y|$ pour conlure.
On a donc, $\forall \varepsilon > 0$, $\sup A - \inf A - 2\varepsilon \leq d(A) \leq \sup A - \inf A$ et faire tendre ε vers 0.
Solution : $d(A) = \sup(A) - \inf(A)$

Exercice 16 : (⋆)
Remarquer que $a - \frac{1}{n}$ n'est pas un majorant de A pour construire u_n.

Exercice 17 : (⋆⋆)

1. Montrer que $x \mapsto \ln(x) + x$ est bijective de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$.
2. Utiliser la croissance de $x \mapsto \ln(x) + x$.
3. Raisonner par l'absurde.

Exercice 18 : (⋆)

1. Raisonner par récurrence.
2. Utiliser les propriétés du carré.
3. Raisonner par l'absurde.
4. *Solution :* $\lim u_n = +\infty$.

Exercice 19 : (⋆⋆)
Raisonner par récurrence pour montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < v_n < 1$, puis montrer que (v_n) est croissante. Sa limite est dans $[0, 1]$. Chercher une autre inégalité pour conclure.
Solution : $\lim v_n = 1$

Exercice 20 : (⋆)
Etudier la monotonie et chercher à majorer ou minorer la suite.
Solution : La suite (u_n) est décroissante et converge vers 1.

Exercice 21 : (⋆)
Etudier la monotonie et chercher à majorer ou minorer la suite.
Solution : La suite (u_n) est décroissante et converge vers $\frac{1}{4}$.

Exercice 22 : (⋆⋆)
Dans le cas $u_0 < 0$, étudier la suite à partir du rang 1. Se ramener à l'étude de trois intervalles stables : $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ et $[\frac{3}{4}, +\infty[$
Solution : La suite (u_n) converge vers $\frac{1}{4}$ si $u_0 \in]-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}[$, la suite (u_n) converge vers $\frac{3}{4}$ si $u_0 = \pm\frac{3}{4}$ et sinon, la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 23 : (⋆⋆)
Etudier la monotonie et chercher à majorer ou minorer la suite.
Solution : Soit α l'unique réel non nul tel que $\ln(1 + 2\alpha) = \alpha$.
Si $u_0 = 0$, alors (u_n) est constante égale à 0.
Si $u_0 = \alpha$, alors (u_n) est constante égale à α.
Si $u_0 \in]0, \alpha[$, alors (u_n) est converge vers α.
Si $u_0 \in]\alpha, +\infty[$, alors (u_n) est converge vers α.
Si $u_0 < 0$, alors (u_n) n'est pas définie.

Exercice 24 : (⋆)

1. Raisonner par récurrence.
2. Raisonner par récurrence.
3. Utiliser la définition.

Exercice 25 : (⋆)

- Etudier la fonction $f : x \mapsto \frac{x+1}{x+2}$ sur $[0, 2]$: on montrera que f est croissante et que $[0, 2]$ est stable par f.
- Montrer, par récurrence, que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.
- En déduire que (u_n) et (v_n) sont convergentes (elles appartiennent à $[0, 2]$)
- Résoudre $f(x) = x$ sur $[0, 2]$: l'équation admet une unique solution : $l = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
- En déduire que (u_n) et (v_n) convergent vers l.
- Conclure.

Exercice 26 : (⋆⋆)

1. Utiliser la définition des suites adjacentes.
2. Raisonner par l'absurde.

Exercice 27 : (⋆⋆)

1. Faire des calculs.
2. Remarquer que $(n+1)(1+\frac{1}{n})^{\alpha+1} \geq (n+1)(1+\frac{1}{n}) \geq n+2$.

III Suites extraites

Exercice 28 :

Utiliser des suites extraites bien choisies.

Exercice 29 : (⋆)

Montrer que $\lim x_{2n} = \lim x_{2n+1}$ en faisant apparaître les termes $x_{6n} = x_{2.(3n)} = x_{3.(2n)}$ et $x_{6n+3} = x_{2.(3n+1)+1} = x_{3.(2n+1)}$.

Exercice 30 : (⋆⋆)

1. Minorer par une somme de termes constants.
2. Montrer que (H_n) est croissante et raisonner en supposant que (H_n) converge vers une limite finie.

Exercice 31 : (⋆)

Soit p une période de la suite (u_n), posons $l = \lim u_n$, soit $n_0 \in \mathbb{N}$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n_0+np} = u_{n_0}.$$

De plus, la suite $(u_{n_0+np})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de (u_n) donc converge vers l.
En déduire que $u_{n_0} = l$ et conclure.

Exercice 32 : (⋆⋆)

Utiliser la définition des suites adjacentes.

Exercice 33 : (⋆ ⋆ ⋆)

Si on suppose l'existence de $\lim_{n\to+\infty} \cos(n\alpha)$, calculer $\cos((n+1)\alpha)$ et exprimer $\sin(n\alpha)$ en fonction de ces quantités.
Utiliser la relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$ pour en déduire une contradiction.
Solution : Les suites $(\cos(n\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(\cos(n\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ *n'ont pas de limites.*

IV Suites complexes

Exercice 34 : (⋆)

1. Montrer que la suite (z_n) est géométrique.
   Solution : $\lim z_n = 0$
2. La suite (z_n) est arithmético-géométrique.
   Solution : $\lim z_n = \frac{2}{2-i}$