Indications du chapitre 6 : Calcul algébrique

I Sommes

Exercice 1 :

1. *Solution :* 48
2. *Solution :* $(n+1)(n+3)$
3. *Solution :* $4n(n+1)$
4. *Solution :* $2n(n+2)$
5. Remarquer que $S_5 = \sum_{k=0}^{2n} x_k - \sum_{k=0}^{n} x_k$.
   Solution : $n(3n+2)$

Exercice 2 : $(\star)$
Rassembler les termes pairs et les termes impairs.
Solution : $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k = n$.

Exercice 3 : $(\star)$
Remarquer que $\sum_{n=1}^{N+1} n^4 = \sum_{n=0}^{N} (n+1)^4$.
Solution : $\dfrac{N^2(N+1)^2}{4}$

Exercice 4 :
Utiliser les formules donnant la somme d'une suite géométrique, la somme de 1 et la somme des n premiers entiers.
Solution : $8.2^n - \frac{7n}{2} - 7 - \frac{n^2}{2}$

Exercice 5 : $(\star\star)$

1. Utiliser le résultat sur les sommes télescopiques.
   Solution : $1 - \dfrac{1}{n+1}$
2. Remarquer que, pour $p \in \mathbb{N}$, $2p+1 = (p+1)^2 - p^2$ et utiliser le résultat sur les sommes télescopiques.
   Solution : $1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$

Exercice 6 : $(\star)$

1. Multiplier et diviser le membre de gauche par : $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.
2. Montrer, en sommant les inégalités précédentes, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \geq 2(\sqrt{n+1} - 1)$ et passer à la limite.
   Solution : $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *diverge.*

Exercice 7 : $(\star\star)$
Raisonner par double inégalité pour prouver la première égalité. On pourra partir de $\lfloor x \rfloor \leq x$ et de $\lfloor nx \rfloor \leq nx$ puis utiliser la croissance de la fonction partie entière
Appliquer le résultat précédent en remplaçant x par $x + \frac{k}{n}$ puis effectuer la division euclidienne de $\lfloor nx \rfloor$ par n : $\lfloor nx \rfloor = nq + r$ avec $r \in [\![0, n-1]\!]$ et $q \in \mathbb{Z}$.

Exercice 8 : $(\star\star)$
Remarquer que si (u_n) est croissante, alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $nu_{n+1} \geq \sum_{k=1}^{n} u_k$.

Exercice 9 :
Utiliser l'inégalité triangulaire, remarquer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{(-1)^n \sin(nx)}{n+k^2}\right| \leq \dfrac{1}{n}$.

Exercice 10 : $(\star\star)$
Utiliser l'inégalité triangulaire, remarquer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \sin\dfrac{\pi}{6k} \leq \dfrac{1}{2}$ et utiliser la somme d'une progression géométrique.

II Produits

Exercice 11 :
Remarquer que : $\prod_{k=0}^{n} 2^k = 2^{\sum_{k=0}^{n} k}$.
Solution : $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Exercice 12 : $(\star)$

1. Méthode 1 : Par récurrence :
   - Pour $n = 1, \ldots$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $(n+1)! \geq \sum_{k=1}^{n} k!$, alors :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k! = \sum_{k=1}^{n} k! + (n+1)! \leq 2(n+1)!$$

  Il ne reste plus qu'à montrer que $2(n+1)! \leq (n+2)!$.

Méthode 2 : On a :

$$\sum_{k=1}^{n} k! \leq \sum_{k=1}^{n} n! = n! \sum_{k=1}^{n} 1 \leq n.n!$$

Il ne reste plus qu'à montrer que $n.n! \leq (n+1)!$.

2. Méthode 1 : Par récurrence :
   - Pour $n = 1, \dots$
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $\sum_{k=1}^{n} k.k! = (n+1)! - 1$, alors :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k.k! = \sum_{k=1}^{n} k.k! + (n+1).(n+1)!$$

   Utiliser l'hypothèse de récurrence et simplifier le résultat obtenu.

   Méthode 2 : On a :

$$\sum_{k=1}^{n} k.k! = \sum_{k=1}^{n} (k+1-1).k! = \sum_{k=1}^{n} ((k+1)! - k!) .$$

   Utiliser ensuite le résultat sur les sommes télescopiques.

Exercice 13 : ($\star$)
Par récurrence en montrant que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n^n \leq (n+1)^n$.

Exercice 14 : ($\star\star$)

1. Faire une étude de fonction.
2. Raisonner par récurrence.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in [\![1, n]\!]$. Appliquer l'inégalité précédente à $x = \frac{u_k}{A_n}$ puis sommer les inégalités obtenues.
4. Etudier le cas d'égalité dans les inégalités précédentes.
   Solution : $u_1 = \cdots = u_n$.

Exercice 15 : ($\star\star$)
On a :

$$\prod_{p=1}^{n} \frac{(2p+1)(2p-1)}{(2p+3)(2p+5)} = \frac{\prod_{p=1}^{n}(2p+1)\prod_{p=1}^{n}(2p-1)}{\prod_{p=1}^{n}(2p+3)\prod_{p=1}^{n}(2p+5)}.$$

On effectue les changements de variables suivants :

- $j = p-1$ dans $\prod_{p=1}^{n}(2p-1)$,
- $k = p+1$ dans $\prod_{p=1}^{n}(2p+3)$,
- $l = p+2$ dans $\prod_{p=1}^{n}(2p+5)$. On obtient une expression de la forme :

$$\frac{\prod_{p=1}^{n}(2p+1)\prod_{j=\dots}^{\dots}(2j+1)}{\prod_{k=\dots}^{\dots}(2k+1)\prod_{l=\dots}^{\dots}(2l+1)}.$$

Ces termes étant identiques, on simplifie les termes communs.
Solution : $\frac{45}{(2n+1)(2n+3)^2(2n+5)}$

Exercice 16 : ($\star\star$)
On raisonne par récurrence.

- Pour $n = 1, \dots$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \leq 2^{n-1}(1+\prod_{i=1}^{n} a_i)$.
  On a :

$$\prod_{i=1}^{n+1}(1+a_i) = \prod_{i=1}^{n}(1+a_i)(1+a_{n+1}) \leq 2^{n-1}(1+\prod_{i=1}^{n} a_i)(1+a_{n+1}).$$

  Or :

$$(1+\prod_{i=1}^{n} a_i)(1+a_{n+1}) = 1 + \prod_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1} + \prod_{i=1}^{n+1} a_i.$$

  Il reste donc à prouver que : $\prod_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1} \leq 1 + \prod_{i=1}^{n+1} a_i$.
  En étudiant $(x-1)(y-1)$, montrer que : $\forall x, y \in [1, +\infty[$, $x + y \leq 1 + xy$.
  Appliquer cette inégalité à x et y bien choisis.

Exercice 17 : ($\star\star$)

1. Utiliser la définition de ch et sh.
2. Faire apparaitre un produit télescopique pour le calcul de u_n.
   Solution : $u_n = \frac{\operatorname{sh} x}{2^n \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}$ *si* $x \neq 0$, $u_n = 1$ *si* $x = 0$,

3. Commencer par calculer $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} y}{y}$ en utilisant un taux d'accroissement.

   Solution : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$ *si* $x \neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ *si* $x = 0$.

III Sommes doubles

Exercice 18 :
Solution : $\dfrac{-2^{n+2}+2^{-n}+8.4^n-2}{3}$

Exercice 19 :
Intervertir les deux sommes.
Solution : $\sum\limits_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1}+2$.

Exercice 20 : (⋆⋆)
Remarquer que $\sum\limits_{i,j\in[\![1,n]\!]} \max(i,j) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{i} i + \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=i+1}^{n} j$.
Solution : $\dfrac{n(n+1)(4n-1)}{6}$

IV Coefficients binomiaux et formule du binôme de Newton

Exercice 21 : (⋆)
Ecrire les coefficients binomiaux avec des factorielles et montrer que la première équation équivaut à $n-2p=1$ et que la seconde équivaut à $4n-9p=-4$ puis résoudre ce système.
Solution : $(n,p)=(17,8)$

Exercice 22 :
Ecrire les coefficients binômiaux avec des factorielles.
Solution : $\frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 23 : (⋆⋆)
Raisonner par récurrence forte.

Exercice 24 : (⋆)
Raisonner par récurrence.

Exercice 25 :
Intégrer, entre 0 et 1, $x \mapsto (1+x)^n$.
Solution : $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\binom{n}{k}}{k+1} = \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Exercice 26 :
Intervertir les sommes et utiliser la formule du binôme de Newton.
Solution : 3^n

Exercice 27 : (⋆⋆)
Calculer, en utilisant la formule du binôme de Newton : $\sum\limits_{k=0}^{p}\binom{n}{2k} + \sum\limits_{k=0}^{p-1}\binom{n}{2k+1}$ et $\sum\limits_{k=0}^{p}\binom{n}{2k} - \sum\limits_{k=0}^{p-1}\binom{n}{2k+1}$.
Solution : $\sum\limits_{k=0}^{p}\binom{n}{2k} = \sum\limits_{k=0}^{p-1}\binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}$.

Exercice 28 : (⋆ ⋆ ⋆)
Par récurrence en montrant, en utilisant le binôme de Newton, que, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $4 \leq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{3n+3}$.