PCSI 1

Programme de colles

2024/2025

Semaine 16 du 27 janvier au 31 janvier

Cours :

- **Chapitre 13 : Limites et continuité**
  - I Limite d'une fonction en un point
  - II Continuité en un point
  - III Continuité sur un intervalle
  - IV Fonctions à valeurs complexes
- **Chapitre 14 : Dérivabilité**
  - I Dérivabilité en un point, fonction dérivée
  - II Propriétés des fonctions dérivables
  - III Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$
  - IV Fonctions convexes
  - V Fonctions complexes

Questions de cours et exercices type :

Q_1 : Composée de fonctions dérivables *(ch 14, proposition 5)*

Q_2 : Lien entre la croissance de f et le signe de sa dérivée. *(ch 14, proposition 7)*

T_1 : *Ch 14, exemple 5*
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
Ce résultat est le théorème de Darboux.

T_2 : *Ch 14, exemple 10*
On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{-u_n}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [\frac{1}{e}, 1].$$

Montrer que (u_n) converge.

T_3 : *Ch 14, exemple 18*

(a) Montrer que la fonction $-\sin$ est convexe sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
(b) Montrer que : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x$.

PCSI 1 | **Programme de colles** | 2024/2025

Semaine 16 du 27 janvier au 31 janvier

Cours :

- **Chapitre 13 : Limites et continuité**
  - I Limite d'une fonction en un point
  - II Continuité en un point
  - III Continuité sur un intervalle
  - IV Fonctions à valeurs complexes
- **Chapitre 14 : Dérivabilité**
  - I Dérivabilité en un point, fonction dérivée
  - II Propriétés des fonctions dérivables
  - III Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$
  - IV Fonctions convexes
  - V Fonctions complexes

Questions de cours et exercices type :

$\mathbf{Q_1}$: Composée de fonctions dérivables *(ch 14, proposition 5)*

$\mathbf{Q_2}$: Lien entre la croissance de f et le signe de sa dérivée. *(ch 14, proposition 7)*

$\mathbf{T_1}$: *Ch 14, exemple 5*
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.
Ce résultat est le théorème de Darboux.

$\mathbf{T_2}$: *Ch 14, exemple 10*
On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{-u_n}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [\frac{1}{e}, 1].$$

Montrer que (u_n) converge.

$\mathbf{T_3}$: *Ch 14, exemple 18*

(a) Montrer que la fonction $-\sin$ est convexe sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
(b) Montrer que : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2x}{\pi} \le \sin x \le x$.