

Exercice 1:

1- Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) = 0$, de plus $f(n) \geq n$ donc $0 \geq n$. Ainsi $n = 0$
et $f(0) = 0$

2- Supposons que $f(n+1) \neq n+1$. Comme $f(n+1) \geq n+1$, on a : $f(n+1) > n+1$.
De plus, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = f(k)$ et $f(k) \geq k$ donc $n+1 \geq k$.
• si $k = n+1$, alors $f(n+1) = n+1$ ce qui est absurde.
• Ainsi $k \in [0, n]$, donc $f(k) = k$, ainsi $n+1 = k$ ce qui est absurde.

Donc : $f(n+1) = n+1$

3- Analyse: Supposons qu'il existe $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \geq n$
et : $\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, m = f(n)$.

- Pour $n = 0$, $f(n) = f(0) = 0 = n$, d'après 1.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $\forall k \in [0, n], f(k) = k$.
D'après 2. $f(n+1) = n+1$.
- Donc, par récurrence forte : $\forall m \in \mathbb{N}, f(m) = m$.

Ainsi $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $n \mapsto n$.

• Synthèse: Posons $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Alors : $\forall m \in \mathbb{N}, f(m) = m \geq m$
 $m \mapsto m$

et, soit $m \in \mathbb{N}$, posons $m = m$, on a $f(m) = m = m$ donc : $\forall m \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m = f(m)$.

Donc f convient.

• Conclusion : le problème admet une unique solution qui est.

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto n$$

Exercice 2:

(2)

1- Comme f est 2-périodique: $f(-1+2) = f(-1)$ donc $f(1) = f(-1)$.

Comme f est impaire: $f(-1) = -f(1)$.

Ainsi $f(1) = -f(1)$ donc: $\boxed{f(1) = 0}$.

2- Soit $n \in \mathbb{Z}$.

• Si n est pair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que: $n = 2k$,

donc $f(n) = f(0+2k) = f(0)$ car f est 2-périodique.

Or f est impaire donc $f(0) = 0$. Ainsi $f(n) = 0$.

• Si n est impair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que: $n = 2k+1$,

donc $f(n) = f(1+2k) = f(1)$ car f est 2-périodique.

Ainsi, d'après 1. $f(n) = 0$.

• Donc:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = 0.}$$

Problème 1:

1-a) • $(1-t)x + ty = x + t(y-x)$. Or $t \geq 0$ et $y-x \geq 0$, donc:

$$(1-t)x + ty \geq x.$$

• $(1-t)x + ty = y + (1-t)(x-y)$. Or $1-t \geq 0$ et $x-y \leq 0$, donc:

$$(1-t)x + ty \leq y.$$

• Ainsi

$$\boxed{x \leq (1-t)x + ty \leq y.}$$

b) $t \mapsto (1-t)$ et $t \mapsto t$ sont deux fcs dérivables sur $[0,1]$

• $t \mapsto (1-t)x + ty$ est donc fco dérivable sur $[0,1]$ et à valeurs dans $[x,y] \subset \mathbb{I}$

or f est fco dérivable sur $\mathbb{I}$, ainsi, par composition:

$t \mapsto f((1-t)x + ty)$ est donc fco dérivable sur $[0,1]$

• Donc

$$\boxed{g \text{ est deux fcs dérivable.}}$$

Soit $t \in [0, 1]$,

(3)

$$g'(t) = -f(x) + f(y) - (-x+y) f'((1-t)x+ty)$$

donc
$$g'(t) = f(y) - f(x) + (x-y) f'((1-t)x+ty)$$

$$g''(t) = (x-y)(-x+y) f''((1-t)x+ty)$$

donc
$$g''(t) = -(x-y)^2 f''((1-t)x+ty)$$

c) $(x-y)^2 \geq 0$ et $f'' \geq 0$ donc $g'' \leq 0$.

Ainsi
$$g' \text{ est décroissante sur } [0, 1]$$

d) $g(0) = f(x) + 0 - f(x)$ donc
$$g(0) = 0$$

$g(1) = 0 + f(y) - f(y)$ donc
$$g(1) = 0$$

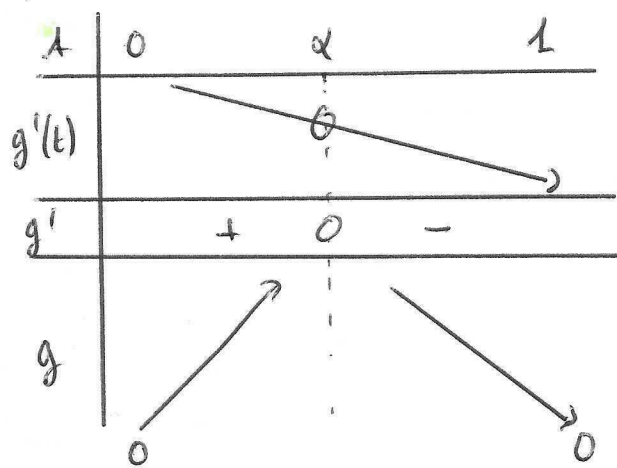
e) Si $g' \geq 0$, alors g est croissante et comme $g(0) = g(1) = 0$, on a $g = 0$.

Donc : $\forall t \in [0, 1], f((1-t)x+ty) = (1-t)f(x) + tf(y)$.

Si $g' \leq 0$, alors g est décroissante et comme $g(0) = g(1) = 0$, on a $g = 0$.

Donc : $\forall t \in [0, 1], f((1-t)x+ty) = (1-t)f(x) + tf(y)$.

Si g' n'est pas de signe constant. Alors, comme g' est décroissante, $g'(0) \geq 0$ et $g'(1) \leq 0$. De plus, comme g' est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que $g'(\alpha) = 0$. Ainsi.



Donc $q \geq 0$. Aim: $\forall t \in [0,1], f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$. (4)

Dans tous les cas:

$$\boxed{\forall t \in [0,1], f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)}$$

2-a) Soit $m \in \mathbb{N}$, et $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\exp(m \ln x) = \exp(\ln(x^m))$$

Donc: $\boxed{\exp(m \ln x) = x^m}$

b) $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Donc: $\boxed{h \text{ est dérivable.}}$

Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $h'(x) = \frac{\alpha}{x} \exp(\alpha \ln x) = \alpha \frac{\exp(\alpha \ln x)}{\exp(\ln x)} = \alpha \exp((\alpha-1)\ln x)$

Donc $\boxed{h'(x) = \alpha x^{\alpha-1}}$

3-a) Soit $q \in \mathbb{R}^p$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$
 $\Leftrightarrow q = \frac{p}{p-1}$

Aim: $\forall p \in]1, +\infty[, \exists! q \in \mathbb{R}^p, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

De plus $0 < p-1 < p$ donc $1 < \frac{p}{p-1}$ ainsi $\frac{p}{p-1} \in]1, +\infty[$.

D'où: $\boxed{\forall p \in]1, +\infty[, \exists! q \in]1, +\infty[, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1}$

b) $-\ln$ est donc pas dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et, si $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$(-\ln)'(x) = -\frac{1}{x}$, $(-\ln)''(x) = \frac{1}{x^2} \geq 0$ donc $-\ln$ est convexe.

Soient $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$, soit $t \in [0,1]$,

si $x \leq y$, d'après 1. e, $-\ln((1-t)x + ty) \leq -(1-t)\ln x - t\ln y$
 donc $(1-t)\ln x + t\ln y \leq \ln((1-t)x + ty)$

si $x > y$, on a $1-t \in [0,1]$ donc on applique 1. e à y, x et $1-t$,
 $-\ln((1-(1-t))y + (1-t)x) \leq -(1-(1-t))\ln y - (1-t)\ln x$
 donc $(1-t)\ln x + t\ln y \leq \ln((1-t)x + ty)$

• Dans tous les cas :

(5)

$$\boxed{\ln((1-t)x + ty) \geq (1-t)\ln x + t\ln y.}$$

c) Soient $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$, posons $t = \frac{1}{q}$. On a $t \in [0, 1]$ et $1-t = 1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$.

D'après 3. b appliqué à x^p et y^q , on a :

$$\ln\left(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln(x^p) + \frac{1}{q}\ln(y^q).$$

$$\begin{aligned} \text{On : } \frac{1}{p}\ln(x^p) + \frac{1}{q}\ln(y^q) &= \frac{p}{p}\ln(x) + \frac{q}{q}\ln(y) = \ln(x) + \ln(y) \\ &= \ln(xy). \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \ln\left(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q\right) \geq \ln(xy).$$

$$\text{Donc, par croissance de exp : } \boxed{\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q \geq xy.}$$