

Exercice 1:

- Supposons que $b|2$. Alors $b=1$ ou $b=2$.
 - Si $b=1$, alors $b|a^4+1$.
 - Si $b=2$, comme $b|a^2+1$, a^2+1 est pair donc a^2 est impair. Ainsi a est impair donc a^4 est impair et a^4+1 est pair. Ainsi $b|a^4+1$.

Dans tous les cas: $b|a^4+1$.

- Supposons que $b|a^4+1$.

On a: $(a^2+1)(a^2-1) = a^4-1$ donc $(a^2+1)(a^2-1)+2 = a^4+1$.

Ainsi $2 = (a^4+1) - (a^2+1)(a^2-1)$.

Or $b|a^4+1$ et $b|a^2+1$. Donc $b|2$.

- Ainsi:

$$b|a^4+1 \Leftrightarrow b|2$$

Exercice 2:

Soit $x \in \mathbb{R}^+$

- On a: $Lx] \leq x$ donc $\sqrt{Lx]} \leq \sqrt{x}$ et, par croissance de la partie entière: $L\sqrt{Lx]} \leq L\sqrt{x}$

- On a: $L\sqrt{x}] \leq \sqrt{x}$ donc $L\sqrt{x}]^2 \leq x$.

Ainsi, par croissance de la partie entière $L[L\sqrt{x}]^2] \leq Lx]$.

Or: $L\sqrt{x}]^2 \in \mathbb{N}$, ainsi $L[L\sqrt{x}]^2] = L\sqrt{x}]^2$, d'où $L\sqrt{x}]^2 \leq Lx]$

Donc $L\sqrt{x}] \leq \sqrt{Lx]}$. Ainsi $L[L\sqrt{x}]] \leq L\sqrt{Lx}]$ et $L\sqrt{x}] \leq L\sqrt{Lx}]$

car $L\sqrt{x}] \in \mathbb{N}$.

- Ainsi:

$$L\sqrt{x}] = L\sqrt{Lx}]$$

Problème 1:

2

1-a) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin x - \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \quad \text{ou} \quad x - \frac{\pi}{4} \equiv \pi - \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv \pi [2\pi]$$

Donc l'ensemble des solutions est :

$$\left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \pi + 2h\pi, h \in \mathbb{Z} \right\}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\bullet \pi \sin x < 1 \quad \text{ou} \quad \cos x > -1, \text{ alors } 6 \sin x - 2 \cos x < 6 + 2 = 8$$

Donc x n'est pas solution.

• Ainsi, πx est solution, alors $\sin x = 1$ et $\cos x = -1$ ce qui est absurde.

Donc :

l'équation n'a pas de solution.

2-a) Comme $x \mapsto 1 + \cos x$ ne s'annule pas sur $] -\pi, \pi[$, f est dérivable sur $] -\pi, \pi[$.

• Soit $x \in] -\pi, \pi[$,

$$f'(x) = \frac{(-2 \sin x - 6 \cos x)(1 + \cos x) + (2 \cos x - 6 \sin x + 8) \sin x}{(1 + \cos x)^2}$$

$$= \frac{-2 \sin x - 6 \cos x - 2 \sin x \cos x - 6 \cos^2 x + 2 \cos x \sin x - 6 \sin^2 x + 8 \sin x}{(1 + \cos x)^2}$$

$$= \frac{6 \sin x - 6 \cos x - 6(\cos^2 x + \sin^2 x)}{(1 + \cos x)^2}$$

Donc :

$$f'(x) = 6 \frac{\sin x - \cos x - 1}{(1 + \cos x)^2}$$

$$b) \bullet \lim_{x \rightarrow (-\pi)^+} (2 \cos x - 6 \sin x + 8) = -2 - 6 \times 0 + 8 = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\pi)^+} (1 + \cos x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in] -\pi, 0[, 1 + \cos x > 0$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow (-\pi)^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} (2\cos x - 6\sin x + 8) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} (1 + \cos x) = 0 \text{ et } \forall x \in]0, \pi[, 1 + \cos x > 0$$

Donc $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = +\infty$.

c) Soit $x \in]-\pi, \pi[$,

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \sin x - \cos x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{4} \sin x - \sin \frac{\pi}{4} \cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) \geq \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[\quad \text{car } x - \frac{\pi}{4} \in]-\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[$$

$$\Leftrightarrow x \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$$

Ainsi

f est croissante sur $[\frac{\pi}{2}, \pi[$ et décroissante sur $]-\pi, \frac{\pi}{2}]$.

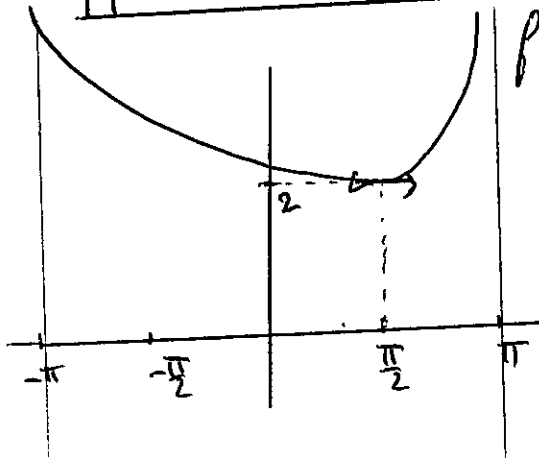
d) $\forall x \in [\frac{\pi}{2}, \pi[, f(x) \geq f(\frac{\pi}{2})$ et $\forall x \in]-\pi, \frac{\pi}{2}], f(x) \geq f(\frac{\pi}{2})$

Donc : $\forall x \in]-\pi, \pi[, f(x) \geq f(\frac{\pi}{2})$

Ainsi

f admet un minimum qui vaut $f(\frac{\pi}{2}) = 2$.

e)



3-a) f est continue sur $[\frac{\pi}{2}, \pi[$.

$\forall x \in [\frac{\pi}{2}, \pi[, f'(x) \geq 0$ et, d'après 1, $\forall x \in [\frac{\pi}{2}, \pi[, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$.

Donc : $\forall x \in]\frac{\pi}{2}, \pi[, f'(x) > 0$ et $f'(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Ainsi f est strictement croissante sur $[\frac{\pi}{2}, \pi[$.

Donc f est bijective de $[\frac{\pi}{2}, \pi[$ vers $[f(\frac{\pi}{2}), \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x)[$, ainsi :

f est bijective de $[\frac{\pi}{2}, \pi[$ vers $[2, +\infty[$.

b) On a: $f(\frac{\pi}{2}) = 2$ et $\frac{\pi}{2} \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$.

Donc $\boxed{f^{-1}(2) = \frac{\pi}{2}}$.

c) f est bijective de $] \frac{\pi}{2}, \pi[$ vers $]2, +\infty[$.

f est dérivable sur $] \frac{\pi}{2}, \pi[$ et : $\forall x \in] \frac{\pi}{2}, \pi[, f'(x) \neq 0$.

Ainsi $\boxed{f^{-1}$ est dérivable sur $]2, +\infty[$.

d) Comme f est strictement croissante sur $] \frac{\pi}{2}, \pi[$, alors :

$\boxed{f^{-1}$ est strictement croissante sur $]2, +\infty[$.

4-a) Soit $x \in]-\pi, \pi[$, et $y \in \mathbb{R}$

$$y = g(x) \Leftrightarrow y = \tan \frac{x}{2} \Leftrightarrow \arctan y = \frac{x}{2} \text{ car } \frac{x}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$
$$\Leftrightarrow x = 2 \arctan y.$$

Donc $\boxed{g \text{ est bijective et } g^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow]-\pi, \pi[}$
 $x \mapsto 2 \arctan x.$

b) $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, (g^{-1})'(x) = \frac{2}{1+x^2}}.$$

5-a) h est continue sur $[1, +\infty[$

h est dérivable sur $[1, +\infty[$ et, sur $x \in [1, +\infty[, h'(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$

Donc $\forall x \in]1, +\infty[, h'(x) > 0$ et $h'(1) = 0$.

Ainsi h est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

Donc h est bijective de $[1, +\infty[$ vers $[h(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)[$

Ainsi $\boxed{h \text{ est bijective de } [1, +\infty[\text{ vers } [2, +\infty[}$

b) Soit $x \in [1, +\infty[$, et $y \in [2, +\infty[$,

$$y = h(x) \Leftrightarrow y = 3x^2 - 6x + 5 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 5 - y = 0.$$

Le discriminant associé à ce polynôme est :

$$\Delta = 36 - 12(5-y) = -24 + 12y = 12(y-2) \geq 0$$

Donc: $y = h(x) \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{12(y-2)}}{6}$

(5)

$\Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{\frac{y-2}{3}}$

$\Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{\frac{y-2}{3}} \text{ car } x \geq 1.$

Donc:

$$h^{-1}: [2, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[\\ x \mapsto 1 + \sqrt{\frac{x-2}{3}}$$

6-a) $\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{1 + \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{\cos(2 \cdot \frac{x}{2})}{1}$

Donc: $\frac{1-t^2}{1+t^2} = \cos(x).$

$\frac{2t}{1+t^2} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}}{1 + \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin(2 \cdot \frac{x}{2})}{1}$

Donc: $\frac{2t}{1+t^2} = \sin(x).$

b) Soit $x \in]-\pi, \pi[$,

$\log(x) = h(\tan \frac{x}{2}) = 3 \tan^2 \frac{x}{2} - 6 \tan \frac{x}{2} + 5$

Posez $t = \tan \frac{x}{2}$,

$f(x) = \frac{2 \cos x - 6 \sin x + 8}{1 + \cos x} = \frac{2 \frac{1-t^2}{1+t^2} - 6 \frac{2t}{1+t^2} + 8}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}}$

$= \frac{2(1-t^2) - 6 \cdot 2t + 8(1+t^2)}{1+t^2 + 1-t^2} = \frac{6t^2 - 12t + 10}{2} = 3t^2 - 6t + 5$

$= 3 \tan^2 \frac{x}{2} - 6 \tan \frac{x}{2} + 5 = \log(x).$

Ainsi

$f = \log$

c) Soit $x \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, soit $y \in]2, +\infty[$

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \log(x)$$

$$\Leftrightarrow g(x) = h^{-1}(y)$$

$$\Leftrightarrow x = g^{-1}(h^{-1}(y))$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \operatorname{Arctan}(h^{-1}(y))$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \operatorname{Arctan}\left(1 + \sqrt{\frac{y-2}{3}}\right)$$

Ainsi

$$\boxed{\begin{array}{l} f^{-1}:]2, +\infty[\rightarrow]\frac{\pi}{2}, \pi[\\ x \mapsto 2 \operatorname{Arctan}\left(1 + \sqrt{\frac{x-2}{3}}\right) \end{array}}$$

d) f^{-1} est dérivable sur $]2, +\infty[$ d'après 3.c

• Soit $x \in]2, +\infty[$,

$$(f^{-1})'(x) = 2 \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-2}}}{1 + \left(1 + \sqrt{\frac{x-2}{3}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{x-2} \left(1 + 1 + 2\sqrt{\frac{x-2}{3}} + \frac{x-2}{3}\right)}$$

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{3}(x-2)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{4}{3} + 2\sqrt{\frac{x-2}{3}} + \frac{x-2}{3}\right)}}$$