

Exercice 1:

1) • Pour $n=0$. Posons $q=0$ et $r=0$. On a $(q,r) \in \mathbb{N}^2$, $n=0=5q+r$ et $r \in [0,4]$ donc (q,r) convient.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons qu'il existe $(q,r) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n=5q+r$ et $r \in [0,4]$.

Alors $n+1=5q+r+1$.

• Si $r \in [0,3]$, posons $q'=q$ et $r'=r+1$.

On a $(q',r') \in \mathbb{N}^2$, $n+1=5q'+r'$ et $r' \in [0,4]$

• Si $r=4$, $n+1=5q+5=5(q+1)$. Posons $q'=q+1$ et $r'=0$

On a $(q',r') \in \mathbb{N}^2$, $n+1=5q'+r'$ et $r' \in [0,4]$.

Dans tous les cas (q',r') convient.

• Donc, par récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists (q,r) \in \mathbb{N}^2, \begin{cases} n=5q+r \\ r \in [0,4] \end{cases}$$

2) Supposons que n ne soit pas un multiple de 5.

Il existe $(q,r) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n=5q+r$ et $r \in [0,4]$.

Comme n n'est pas un multiple de 5, on a $r \neq 0$.

De plus :

$$n^2 = (5q+r)^2 = 25q^2 + 10qr + r^2 = 5(5q^2 + 2qr) + r^2$$

Or n^2 est un multiple de 5 donc r^2 est un multiple de 5.

Or $r^2 \in \{1, 4, 9, 16\}$ ce qui est absurde.

Donc

$$n \text{ est un multiple de } 5.$$

3) Supposons que $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$. Il existe $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\sqrt{5} = \frac{p}{q} \text{ avec } p \text{ et } q \text{ premiers entre eux.}$$

Alors $5 = \frac{p^2}{q^2}$ donc $p^2 = 5q^2$. Ainsi p^2 est un multiple de 5.

Donc, d'après 2, p est un multiple de 5.

Ainsi, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 5k$.

Donc $(5k)^2 = 5q^2$. Ainsi $q^2 = 5k^2$. Donc q^2 est un multiple de 5.

Ainsi q est un multiple de 5.

Donc p et q sont deux multiples de 5 ce qui est absurde car p et q sont premiers entre eux.

Donc :

$$\boxed{\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}}.$$

Exercice 2:

1- Par $n=0$, $u_{n+1} - u_n = 1 - u_0 = 0 \in [0, n]$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $\forall k \in [0, n]$, $k+1 - u_k \in [0, k]$.

On a : $u_{n+1} = u_n + u_{n+1} - u_n$.

Comme $n+1 - u_n \in [0, n]$, on a $(n+1 - u_n) + 1 - u_{n+1-u_n} \in [0, n+1 - u_n]$.

Donc $n+2 - (u_n + u_{n+1-u_n}) \in [0, n+1]$.

Ainsi $n+2 - u_{n+1} \in [0, n+1]$.

• Donc, par récurrence forte :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, n+1 - u_n \in [0, n]}.$$

2- • Par $n=0$, $u_n = u_0 = 1 = n+1$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $\forall k \in [0, n]$, $u_k = k+1$.

Comme $n+1 - u_n \in [0, n]$, on a $u_{n+1-u_n} = (n+1 - u_n) + 1$.

Donc $u_n + u_{n+1-u_n} = n+2$.

Ainsi $u_{n+1} = n+2$.

• Donc, par récurrence forte :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n+1}.$$

Exercice 3:

3

• f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

• Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{e^x - 2e^{-x}}{(e^x + 2e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}(e^{2x} - 2)}{(e^x + 2e^{-x})^2}$$

$$\text{Donc } f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 2 > 0 \Leftrightarrow 2x > \ln 2 \Leftrightarrow x > \frac{\ln 2}{2}.$$

Donc est strictement croissante sur $[\frac{\ln 2}{2}, +\infty[$
et strictement décroissante sur $] -\infty, \frac{\ln 2}{2}]$

Exercice 4:

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons que: $\forall \varepsilon > 0, x \leq \varepsilon$ et $x > 0$.

Posons $\varepsilon = \frac{x}{2}$. On a $\varepsilon > 0$ donc $x \leq \varepsilon$. Ainsi $x \leq \frac{x}{2}$ donc $x \leq \frac{1}{2}x$
ce qui est absurde. Donc: $(\forall \varepsilon > 0, x \leq \varepsilon) \Rightarrow x \leq 0$.

Ainsi: $\forall x \in \mathbb{R}, (\forall \varepsilon > 0, x \leq \varepsilon) \Rightarrow x \leq 0$ est vraie.

2) Supposons: $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, (x \leq \varepsilon \Rightarrow x \leq 0)$.

Posons $x = \frac{1}{2}$ et $\varepsilon = 1$. On a $\varepsilon > 0$ et $x \leq \varepsilon$.

Donc $x \leq 0$. Ainsi $\frac{1}{2} \leq 0$ ce qui est absurde.

Donc: $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, (x \leq \varepsilon \Rightarrow x \leq 0)$ est fausse.

Problème 1:

(4)

1-a) • Supposons $x \in \mathbb{Z}$. Posons $n=x$ et $d=0$. On a $x=n+d$, $n \in \mathbb{Z}$ et $d \in [0,1[$.

Ainsi, par unicité, $L(x)=n=x$ et $\{x\}=d=0$.

Donc $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x)=0$

• Supposons que $f(x)=0$. Alors $\{x\}=0$. On a $x=L(x)+\{x\}$.

Ainsi $x=L(x) \in \mathbb{Z}$. D'où : $f(x)=0 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$.

• Ainsi : $f(x)=0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.

b) • Supposons $x \in [0,1[$. Posons $n=0$ et $d=x$. On a $x=n+d$, $n \in \mathbb{Z}$ et $d \in [0,1[$.

Ainsi, par unicité, $L(x)=n=0$ et $\{x\}=d=x$.

Donc $x \in [0,1[\Rightarrow f(x)=x$.

• Supposons $f(x)=x$. Alors $\{x\}=x$. Or $\{x\} \in [0,1[$, donc $x \in [0,1[$.

Ainsi $f(x)=x \Rightarrow x \in [0,1[$.

• D'où : $f(x)=x \Leftrightarrow x \in [0,1[$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $x=L(x)+\{x\}$, donc $x+1=L(x)+1+\{x\}$.

Comme $L(x)+1 \in \mathbb{Z}$ et $\{x\} \in [0,1[$, on a, par unicité :

$L(x+1)=L(x)+1$ et $\{x+1\}=\{x\}$.

Donc $f(x+1)=f(x)$. Ainsi f est 1-périodique.

d) • $1,3 = 1 + 0,3$ avec $1 \in \mathbb{Z}$ et $0,3 \in [0,1[$ donc $\{1,3\}=0,3$ et $f(1,3)=0,3$

• $-1,3 = -2 + 0,7$ avec $-2 \in \mathbb{Z}$ et $0,7 \in [0,1[$ donc $\{-1,3\}=0,7$ et $f(-1,3)=0,7$

Ainsi $f(1,3) \neq f(-1,3)$ et $f(-1,3) \neq -f(1,3)$

Donc f n'est ni paire, ni impaire.

2-a) L'équation caractéristique associée est $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$.

Son discriminant est $\Delta = 5$. Ses racines sont $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

• Donc, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \mu_0 = 0 \\ \mu_1 = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \mu \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\mu \\ -\mu \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \mu \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\mu \\ -\sqrt{5}\mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \mu = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

• Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \mu_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n}$

b) • Pour $n=0$, $\mu_n = \mu_0 = 0 \in \mathbb{N}$

• Pour $n=1$, $\mu_n = \mu_1 = 1 \in \mathbb{N}$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mu_n \in \mathbb{N}$ et $\mu_{n+1} \in \mathbb{N}$.

Alors $\mu_{n+2} = \mu_{n+1} + \mu_n \in \mathbb{N}$.

• Donc, par récurrence double : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \mu_n \in \mathbb{N}}$.

3-a) • Pour $n=0$, $v_n = v_0 = 1$ et $\mu_n = \mu_0 = 0$ donc $v_n = \{x\}^{\mu_n}$.

• Pour $n=1$, $v_n = v_1 = \{x\}$ et $\mu_n = \mu_1 = 1$ donc $v_n = \{x\}^{\mu_n}$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $v_n = \{x\}^{\mu_n}$ et $v_{n+1} = \{x\}^{\mu_{n+1}}$.

Alors $v_{n+2} = v_{n+1} \cdot v_n = \{x\}^{\mu_{n+1}} \cdot \{x\}^{\mu_n} = \{x\}^{\mu_{n+1} + \mu_n} = \{x\}^{\mu_{n+2}}$.

• Donc, par récurrence double : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \{x\}^{\mu_n}}$.

b) $(\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = 0) \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*, \{x\}^{\mu_n} = 0)$
 $\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*, \{x\} = 0 \text{ et } \mu_n \neq 0)$

Or : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mu_n \neq 0$, ainsi :

$(\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = 0) \Leftrightarrow \{x\} = 0$.

Donc $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = 0) \Leftrightarrow x_1 = 0}$.

Problème 2:

6

1-a) Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. Supposons que $f(n) = f(m)$.

$$\text{Alors } n+m = f(f(n) + f(m)) = f(f(m) + f(n)) = m+n$$

Donc $n=m$.

Ainsi:

$$\boxed{\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, f(n) = f(m) \Rightarrow n = m.}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{On a } f(f(n-1) + f(n+1)) = (n-1) + (n+1) = 2n$$

$$\text{et } f(2f(n)) = f(f(n) + f(n)) = n+n = 2n.$$

$$\text{Donc } f(f(n-1) + f(n+1)) = f(2f(n)).$$

$$\text{Ainsi, d'après 1.a, } f(n-1) + f(n+1) = 2f(n).$$

$$\text{D'où : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n-1) + f(n+1) = 2f(n).}$$

c) Posons $b = f(0)$ et $a = f(1) - f(0)$.

Comme f est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a: $a, b \in \mathbb{Z}$.

$$\text{De plus : } \begin{aligned} &\text{• par } n=0, f(n) = f(0) = b = an+b. \\ &\text{• par } n=1, f(n) = f(1) = a+b = an+b. \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \boxed{\forall n \in \{0, 1\}, f(n) = an + b.}$$

$$\text{d) } \left. \begin{aligned} &\text{• par } n=0, f(n) = an+b \\ &\text{• par } n=1, f(n) = an+b \end{aligned} \right\} \text{ d'après 1.c.}$$

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $f(n) = an+b$ et $f(n+1) = a(n+1)+b$.

$$\text{D'après 1.b, } 2f(n+1) = f(n) + f(n+2).$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } f(n+2) &= 2f(n+1) - f(n) = 2a(n+1) + 2b - an - b \\ &= a(n+2) + b. \end{aligned}$$

• Donc, par récurrence double:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = an + b.}$$

e) $f(f(0)+f(0)) = 0+0$ donc $f(2f(0)) = 0$

Or $f(0) = b$, d'où $f(2b) = 0$. Ainsi $2ab+b=0$.

D'où $(2a+1) \cdot b = 0$. Donc $a = -\frac{1}{2}$ ou $b = 0$.

Or $a \in \mathbb{Z}$, donc $b = 0$.

• $f(f(1)+f(1)) = 1+1$ donc $f(2f(1)) = 2$.

Or $f(1) = a$ d'où $f(2a) = 2$. Ainsi $2a^2 = 2$

Donc $a = \pm 1$. Or $f(1) \in \mathbb{N}$ donc $a = 1$.

• Ainsi: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n.}$

2- • Analyse: Supposons qu'il existe $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que:

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, f(f(n)+f(m)) = n+m.$$

D'après 1, $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $n \mapsto n$.

• Synthèse: Posons $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.
 $n \mapsto n$

Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $f(f(n)+f(m)) = f(n+m) = n+m$.

Donc f convient.

• Conclusion:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{L'unique solution au problème est:} \\ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto n \end{array}}$$

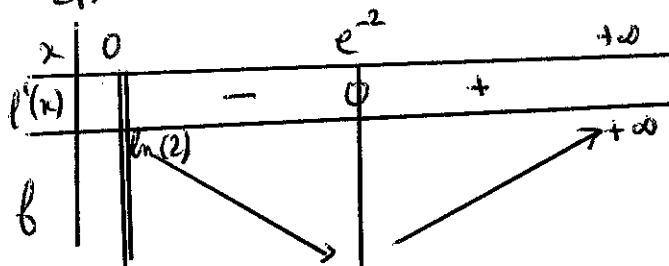
Problème 3.

8

1- f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{++}$

• Soit $x \in \mathbb{R}^{++}$,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(x) + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} (\ln(x) + 2)$$



Par croissance comparées: $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln(x) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ln(2)$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2-a) • $f(e^{-2}) = \frac{1}{e} \ln(e^{-2}) + \ln(2) = -\frac{2}{e} + \ln(2) \approx -0,72 + 0,69$ donc $f(e^{-2}) < 0$

• f est continue et strictement décroissante sur $]0, e^{-2}]$.

$0 \in]f(e^{-2}), \lim_{x \rightarrow 0} f[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0, e^{-2}]$.

• f est continue et strictement croissante sur $]e^{-2}, +\infty[$.

$0 \in]f(e^{-2}), \lim_{x \rightarrow +\infty} f[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]e^{-2}, +\infty[$.

• Ainsi l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}^{++}$.

b) • $x^{\sqrt{x}}$ est défini pour $x \in \mathbb{R}^+$

• Pour $x = 0$, $x^{\sqrt{x}} = 1 \neq \frac{1}{2}$.

• Soit $x \in \mathbb{R}^{++}$, $x^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{\sqrt{x} \ln x} = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \ln x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \ln x = -\ln(2)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0.$$

Donc l'équation (E) admet deux solutions sur $\mathbb{R}^+$.

3-a) $f\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n^2}\right) + \ln(2) = 0$
 $\Leftrightarrow -\ln(n^2) + n \ln(2) = 0$
 $\Leftrightarrow \ln(2^n) = \ln(n^2)$

Donc $f\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2^n = n^2$.

b) Comme $f\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$, on a : $2^n = n^2$.

Or $n \in \mathbb{N}^*$, donc 2^n est pair. Ainsi n^2 est pair.

Donc n est pair. Donc :

il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2p$

De plus $2^n = n^2$ donc $2^{2p} = (2p)^2$ Ainsi $2^p = 2p$, d'où $2^{p-1} = p$

c) • Pour $p=1$, $2^{p-1} = 2^0 = 1 = p$

• Pour $p=2$, $2^{p-1} = 2^1 = 2 = p$

Donc $p=1$ et $p=2$ vérifient $2^{p-1} = p$

d) • Pour $p=1$, $n=2$ vérifie $n^2 = 2^n$ donc $f\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$ ainsi $\frac{1}{4}$ est solution de (E)

• Pour $p=2$, $n=4$ vérifie $n^2 = 2^n$ donc $f\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$ ainsi $\frac{1}{16}$ est solution de (E)

Comme (E) admet deux solutions,

les solutions de (E) sont $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{16}$.

4-a) f est continue et strictement croissante sur $[e^{-2}, +\infty[$.

Donc f est bijective de $[e^{-2}, +\infty[$ vers $[f(e^{-2}), \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t),$

c'est-à-dire f est bijective de $[e^{-2}, +\infty[$ vers $[\ln 2 - \frac{2}{e}, +\infty[$.

b) On a $\frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{16} < e^2 < \frac{1}{4}$, donc $\frac{1}{4} \in (e^{-2}, +\infty[$.

De plus, $f\left(\frac{1}{4}\right) = 0$.

Ainsi $f^{-1}(0) = \frac{1}{4}$.

c) $\forall x \in]e^2, +\infty[$, $f'(x) \neq 0$ et $f'(e^2) = 0$ d'après 1.

(10)

Alors f^{-1} est dérivable sur $]f(e^2), \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)[$, c'est-à-dire :

$$\boxed{f^{-1} \text{ est dérivable sur }]\ln 2 - \frac{2}{e}, +\infty[}$$

$$d) (f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(\frac{1}{e})}$$

$$\text{Or : } f'(\frac{1}{e}) = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{e}} (\ln(\frac{1}{e}) + 2) = 2 - \ln 4 = 2(1 - \ln 2)$$

$$\text{Donc } \boxed{(f^{-1})'(0) = \frac{1}{2(1 - \ln 2)}}$$